Intervals de marques

Lambert Jorba Jorba

1 de Juliol de 2003

Índex

Capítol 1

Introducció

1.1 Context de l'aritmètica de marques

1.1.1 Extensió del sistema numèric

El sistema numèric és la idealització d'un sistema d'operacions associat a les idees de quantitat i d'ordre. Els nombres naturals constitueixen el sistema numèric més elemental assimilable a aquestes dues nocions. L'estadi numèric subsegüent al dels naturals és el conjunt dels nombres enters, resultat d'una idealització de les operacions suma i resta. De manera semblant, el conjunt dels nombres racionals estén el dels nombres enters amb els valors fraccionaris, generalitzant l'operació de quocient.

Dels nombres racionals es passa al sistema dels nombres reals, a partir de la idea de convergència de successions de nombres racionals cap un valor exacte que pot no ser racional.

El sistema dels reals és la idealització de tot sistema de mesures geomètriques, accesssibles o no des del conjunt dels nombres racionals.

Cadascun d'aquests nivells del sistema numèric no és, evidentment, independent dels altres, sinó que és fruit d'una construcció en la qual les operacions bàsiques mantenen tant com es pot les propietats formals. De fet, cada sistema està immers dins del següent sistema, la necessitat del qual ve motivada pel fet d'abordar problemes des del context del sistema inicial que no tenen resposta dins d'ell.

1.1.2 Recta real, recta digital i anàlisi intervalar

Malgrat la flexibilitat dels nombres reals per tractar conceptualment models de caràcter geomètric, ja que es tracta d'un sistema continu, el seu ús presenta dificultats que no poden ser resoltes dins del propi sistema. Un problema al qual s'enfronta el sistema de nombres reals és el de la codificació digital: qualsevol sistema de codificació digital és finit i els seus elements, si bé tenen la funció de representar nombres reals, fóra més apropiat conceptualment de dir que apunten cap a nombres reals, que de veure'ls com un sistema identificat amb un subconjunt dels reals posat que, en el càlcul efectiu, no solament la majoria dels arrodoniments a un nombre finit de xifres comporten la pèrdua del valor numèric inicial, sinó que formes diferents de calcular un mateix valor sobre una escala digital comporten resultats diferents.

El càlcul d'errors clàssic es caracteritza essencialment per la representació de cada valor real per un sol valor digital i per l'aplicació de tècniques analítiques que proporcionin l'ordre de magnitud de la separació entre aquests dos valors: el valor ideal dels reals definit per la geometria del problema i el valor efectiu obtingut mitjançant un algorisme o una mesura definits sobre la recta digital.

La representació digital d'un valor real obtingut per un algorisme numèric, o per un procés de mesura, és, en principi, una selecció més o menys determinista entre un valor digital a l'esquerra i un valor digital a la dreta del valor real definit pel càlcul analític ideal.

El càlcul i l'anàlisi intervalars sorgeixen bàsicament del propòsit d'operar amb tota la informació assolible per un càlcul o una mesura numèrica digital; es tracta de mantenir totes dues aproximacions: la que és una fita a l'esquerra del valor analític i la que n'és una fita a la dreta. Això ha de conduir a un control pas a pas de l'error numèric dirigit per la pròpia aritmètica dels càlculs intervalars.

Els problemes plantejats per l'aproximació intervalar són més profunds del que aquest planteig simplificador permet de suposar, però un avantatge analític del procediment intervalar sobre el càlcul numèric tradicional és que el procediment intervalar dóna origen a un sistema teòric més autònom que, fonamentalment, permet de tractar de forma sistemàtica l'enllaç semàntic dels objectes digitals als seus referents analítics sobre els espais construïts sobre la recta real.

1.1.3 El sistema intervalar conjuntista

L'estadi immediatament superior al sistema dels nombres reals està constituït pels intervals conjuntistes o intervals clàssics, que representem per $I(\mathbb{R})$. La seva elecció per a resoldre el problema digital respon al fet que, en una escala digital qualsevol, tot nombre real pot en principi afitar-se superiorment i inferior per valors d'aquella escala. És obligat de tenir ambdues fites perquè no sempre n'hi ha prou només amb les fites superiors o només amb les fites inferiors de les dades per obtenir la fita superior o la fita inferior d'un resultat.

Es defineix bàsicament l'extensió intervalar conjuntista d'una operació sobre els reals com aquell interval format pels resultats d'operar tots els nombres reals que pertanyen a cada un dels intervals que constitueixen les dades de l'operació intervalar; de fet, l'anàlisi intervalar clàssica assimila el concepte d'interval al d'un ens purament conjuntista, resultant-ne un sistema defectiu semànticament en què la principal relació és la inclusió conjuntista entre intervals. Donat aquest punt de partida, tant les operacions intervalars aritmètiques com les funcions intervalars racionals són inclusives, fet que és compatible amb una llei d'arrodoniment extern.

En l'anàlisi intervalar clàssica, si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ és una funció contínua, l'extensió intervalar fonamental, no sempre calculable, és $R_f : I(\mathbb{R}^n) \to I(\mathbb{R})$ -coneguda com extensió unida d'f- i ens vindrà definida com

$$R_f(X_1', \ldots, X_n') := \left[\min_{x \in X'} f(x_1, \ldots, x_n) \, , \, \max_{x \in X'} f(x_1, \ldots, x_n)\right].$$

Degut al fet que aquesta definició no és un càlcul racional, cal utilitzar una segona extensió $F : I(\mathbb{R}^n) \to I(\mathbb{R})$ que es defineix a partir del mateix procés de càlcul de la funció f, en què s'haurà substituït els operadors reals per les seves corresponents extensions unides, i els operands reals per operands intervalars, on cada incidència d'una variable serà tractada efectivament com una variable independent.

Resulta evident que es verificarà la inclusió

$$R_f(X_1, \ldots, X_n) \subseteq F(X_1, \ldots, X_n) = Z$$

i que la semàntica que es validarà és

$$U(x_1, X_1') \cdots U(x_n, X_n') \, E(z, Z') \; z = f(x_1, \ldots, x_n).$$

Però el sistema dels intervals clàssics presenta un seguit d'anomalies dins del seu propi context. Algunes d'aquestes deficiències són fàcilment corregibles, com és la no existència d'element simètric respecte la suma -i amb això es perd l'estructura de grup que posseeix $(\mathbb{R}, +)$ -i d'altres són essencials, com és el fet que no es compleixi la propietat distributiva del producte respecte de la suma. Però aquest sistema presenta altres deficiències, com és l'ambigüetat semàntica, que fa d'$I(\mathbb{R})$ un sistema clarament defectiu i ambigu. Vegem per exemple: si P és un predicat real, sobre un interval $X \in I(\mathbb{R})$, podem obtenir indistintament els dos predicats intervalars

$$E(x, X) P(x)$$
o
$$U(x, X) P(x)$$

essent ambigua la referència semàntica dels sistemes de valors intervalars als sistemes de valors reals corresponents. Es podria mencionar també, per exemple, la incompatibilitat de la truncació intervalar externa amb el quantificador universal.

1.1.4 Planteig de l'extensió de sistemes numèrics: l'extensió intervalar modal

Com hem vist, la construcció d'un nou sistema ve motivada sempre per deficiències del sistema que en dóna origen. En general, aquestes deficiències es plantegen en termes del propi sistema i no tenen solució dins d'ell, fet que fa necessari elaborar un sistema més ampli. Ara bé, cada sistema numèric no s'utilitza de forma aïllada, sinó que acostuma a englobar el sistema anterior i a mantenir-ne les lleis fonamentals.

El sistema dels intervals conjuntistes no és una extensió adequada dels reals per a resoldre la problemàtica de la informació numèrica, malgrat no ser estrictament contradictori, si només ens fixem en el fet que conté un sistema isomorf a $\mathbb{R}$: el dels intervals puntuals. Tampoc no desqualifica aquest sistema el fet que la propietat distributiva esdevingui una propietat subdistributiva i una propietat distributiva regional: aquesta transformació tradueix una mutació essencial de la informació numèrica en adquirir "amplitud" cadascun dels seus valors. El sistema $I(\mathbb{R})$ falla, però, en una sèrie de punts crítics que repassarem fent ús d'exemples additius elementalíssims i que demostren que el sistema $I(\mathbb{R})$ és defectiu en qüestions que poden ser degudament tractades en el sistema més ampli dels intervals modals

- La suma no és un grup, és a dir, $A+X = B$ no té sempre solució a $I(\mathbb{R})$. Aquesta limitació és en realitat molt superficial, perquè pot resoldre's per completació del sistema algebraic $\langle I(\mathbb{R}), +\rangle$ ja sigui directament, ja sigui a partir de la completació reticular de $\langle I(\mathbb{R}), \subseteq\rangle$.
- El fet que la llei distributiva $a*(b+c) = a*b+a*c$ dels reals esdevingui la llei subdistributiva

$$A * (B + C) \subseteq A * B + A * C$$

sobre $I(\mathbb{R})$ és una pèrdua de regularitat intrínseca a la informació intervalar i no es resol estrictament mitjançant cap extensió de $I(\mathbb{R})$, ja que es tracta d'una irregularitat positiva.

- El problema de l'ús semàntic de $I(\mathbb{R})$ per referir-se a relacions sobre $\mathbb{R}$ és més crític, ja que es pot mostrar alguns casos en què relacions operacionals que correspondrien conceptualment a l'equació $A + X = B$, no s'ajustarien a la solució conjuntista per a X que proporcionaria el sistema $I(\mathbb{R})$, sense que per aquest motiu deixin de ser operacionalment consistents. En aquest sentit és clarificador l'exemple descrit a [5, pàg 13] en el qual es planteja una situació en què es disposa de dos cables dels quals coneixem inexactament les seves longituds, és a dir, estan compreses entre dos valors reals; i s'estudia com afecta aquest fet quan utilitzant aquests dos cables es vol abastar una determinada longitud.

  Aquest és ja un problema estrictament lligat a la relació semàntica $I(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, i que no es pot resoldre acudint només a la completació estructural de $I(\mathbb{R})$.

- La mateixa validesa experimental dels valors numèrics afitats, que inevitablement vol dir dels intervals, exigeix de tenir en compte explícitament com la relació semàntica $I(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ està lligada a l'associació dels intervals als quantificadors que representen una modalitat de selecció.

Així doncs, l'estadi superior que ha de reduir la defectivitat estructural i semàntica de $I(\mathbb{R})$ és el sistema dels intervals modals que representarem per $I^*(\mathbb{R})$.

1.1.5 Elements i propietats principals del sistema dels intervals modals

Els intervals modals es materialitzen formalment per parelles d'elements de la forma (X', Q_X) on X' és un interval conjuntista, al qual anomenem abast o extensió de l'interval, i Q_X és un quantificador clàssic $Q_X \in \{E, U\}$, que anomenem modalitat de l'interval. Així un interval modal serà de la forma $X = (X', E)$ -interval propi- si la modalitat de l'interval és existencial, o bé (X', U) -interval impropi- si la modalitat és universal. Si $X = (X', Q_X)$ és un interval modal, per una variable real x, s'introdueix el concepte de quantificador modal Q com

$$Q(x, X) := Q_X(x, X')$$

i amb això, si P és un predicat real i $X = (X', Q)$ és un interval modal, tindrem

$$P \text{ és un predicat acceptat per } X \Leftrightarrow Q\,(x, X)\, P\,(x)$$

on

$$Q\,(x, X)\, P\,(x) := E\,(x, X')\, P\,(x) \;\text{ si } X = (X', E)$$

$$Q\,(x, X)\, P\,(x) := U\,(x, X')\, P\,(x) \;\text{ si } X = (X', U)\,.$$

Així doncs, amb la introducció dels intervals impropis es perd l'ambigüitat semàntica subjacent en els intervals clàssics i a la vegada s'aconsegueix la completació reticular del conjunt dels intervals i també deixa de ser parcial l'operació de secció de dos intervals, aconseguint-se una estructura de reticle respecte la inclusió modal sobre el sistema completat.

Si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ és una funció contínua, una extensió semàntica intervalar serà aquella funció

$$F : I^*\,(\mathbb{R}^n) \to I^*\,(\mathbb{R})\,,$$

de forma que si donat $A \in I^*\,(\mathbb{R}^n)$ existeix $F\,(A)$, aleshores es compleix (per més detall vegeu [33, pàg 24])

$$U\left(X', I\,(\mathbb{R}^n)\right)\left((\cdot \in X') \in \text{Pred}^*\,(A) \Rightarrow \left(\cdot \in f\left(X'\right)\right) \in \text{Pred}^*\,(F\,(A))\right).$$

Per una funció contínua f, tenen un paper important les funcions $*$ i $**$-semàntiques, clau de la interpretació semàntica dels càlculs intervalars. Aquestes vénen definides per

$$\begin{array}{rcl} f^* : I^*\,(\mathbb{R}^n) & \longrightarrow & I^*\,(\mathbb{R}) \\ X & \longmapsto & f^*\,(X) = \bigvee_{x_p \in X'_p} \bigwedge_{x_i \in X'_i} [f\,(x_p, x_i)\ ,\ f\,(x_p, x_i)] \end{array}$$

i per

$$\begin{array}{rcl} f^{**} : I^*\,(\mathbb{R}^n) & \longrightarrow & I^*\,(\mathbb{R}) \\ X & \longmapsto & f^{**}\,(X) = \bigwedge_{x_i \in X'_i} \bigvee_{x_p \in X'_p} [f\,(x_p, x_i)\ ,\ f\,(x_p, x_i)] \end{array}$$

respectivament on X_p i X_i corresponen a les components pròpies i impròpies d'X. Cal destacar, però, que aquestes extensions tampoc no són càlculs racionals, tal com tampoc no ho era l'extensió R_f de l'anàlisi intervalar clàssic. La importància d'aquestes extensions recau en els teoremes semàntics que les interpreten. Així, si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ és una funció contínua, $A \in I^*\,(\mathbb{R}^n)$ de forma que existeixi $f^*\,(A)$, donat $Z \in I^*\,(\mathbb{R})$ el teorema semàntic per $f^*\,(A)$ dóna l'equivalència entre les afirmacions següents

1. $f^*(A) \subseteq Z$
2. $U(X', I(\mathbb{R}^n))((\cdot \in X') \in Pred*(A) \Rightarrow (\cdot \in f(X')) \in Pred*(Z))$
3. $U\left(a_p, A'_p\right) Q(z, Z) E(a_i, A'_i)\ z = f(a_p, a_i)$

i si existeix $f^{**}(A)$, donat $Y \in I^*(\mathbb{R})$ el teorema semàntic dual, per $f^{**}(A)$, dóna les equivalències entre les afirmacions següents

1. $Y \subseteq f^{**}(A)$
2. $U(X', I(\mathbb{R}^n))((\cdot \notin X') \in Copred*(A) \Rightarrow (\cdot \notin f(X')) \in Copred*(Y))$
3. $U(a_i, A'_i) Q(y, Dual(Y)) E\left(a_p, A'_p\right)\ z = f(a_p, a_i)$

Les propietats de la inclusivitat dels operadors meet i join ens porten també a la inclusivitat de les funcions f^* i f^{**} i a més, les truncacions externa i interna queden ambdues perfectament determinades per la introducció dels intervals impropis: l'aplicació de la semàntica de f^* exigeix una truncació exterior, mentre que la semàntica de f^{**} demana la truncació interior.

L'autèntic problema de les funcions f^* i f^{**} està en el fet de no ser, en general, calculables -o si ho són, molts cops no de forma racional-. Per aquest motiu s'introdueixen els conceptes de les extensions racionals modals d'una funció contínua f, representades per fR^* (respectivament fR^{**}), com aquelles en les quals cada operador real de l'arbre sintàctic de la funció f és substituït per la seva $*$-extensió semàntica (respectivament, la seva $**$-extensió semàntica). Si tots els operadors que formen la funció f són racionals, és a dir, les seves $*$ i $**$ extensions coincideixen, definirem la funció racional modal associada a f que representarem per fR.

Evidents raons d'interpretació semàntica fan que la truncació per la funció fR^* sigui la truncació externa en cada operador, mentre que per la funció fR^{**} cada operador truncaria internament.

Els operadors racionals intervalars no són un repertori tancat com en el cas dels operadors reals: només cal que siguin JM commutatius i programables.

Algunes de les questions plantejades per l'anàlisi intervalar modal són

La interpretabilitat: quan un càlcul no és interpretable, quines coercions són factibles per aconseguir que ho sigui.

L'optimalitat d'un càlcul racional: sota quines condicions un càlcul intervalar $fR(X)$ és el "millor càlcul"; és a dir, quan es compleix

$$f^*(X) = fR(X) = f^{**}(X).$$

1.1.6 Problema intervalar del context lineal

Un tractament de les operacions intervalars des d'un punt de vista diferent al que en línies generals s'ha descrit anteriorment, el trobem en el context intervalar lineal, que evita situacions indesitjables que se'ns plantegen sota el punt de vista aritmètic de l'anàlisi intervalar. Aquestes situacions són, en primer lloc, l'efecte conegut com *wrapping efect,* que consisteix en el caràcter englobant de successius càlculs intervalars i que fa que la seva aplicació resulti inadequada enfront de problemes que impliquen una significació predominant de les condicions inicials o que impliquen canvis de coordenades. En segon lloc, el sistema aritmètic donat per les operacions suma i producte intervalars no és un sistema apte per resoldre adequadament els problemes lineals. Qui resol aquests problemes que acabem de plantejar és el context intervalar lineal, que no suposa sortir del sistema dels intervals, però sí que dota d'unes noves estructures al conjunt dels intervals modals.

1.1.7 Deficiències en el conjunt dels intervals modals

Hem exposat anteriorment que, quan des d'un sistema numèric es plantejaven qüestions que no tenien resposta dins del mateix sistema, sorgia la necessitat de cercar un nou sistema al qual recórrer per resoldre-les.

El problema que inicialment ens va plantejar l'anàlisi intervalar, i que no podíem resoldre dins del propi sistema, va ser el tractament de les truncacions en els càlculs amb operacions lineals. Aquest problema sorgeix perquè la modalitat efectiva (és a dir, la que determina el quantificador) d'un interval en un càlcul lineal pot no ser la mateixa que la modalitat real de l'interval. Aquest fet comporta que la regla de truncació externa no sigui una regla d'aplicació universal en els càlculs intervalars amb operacions lineals.

No vam tardar molt a adornar-nos que el problema descrit de les truncacions en les operacions lineals tenia una vessant particular: fins i tot en un sistema intervalar d'equacions lineals amb producte aritmètic, un mateix interval podia aparèixer en dues equacions diferents actuant amb modalitat oposada en l'una de l'altra. No podíem acceptar, doncs, unes regles de truncació intervalar clàssiques que feien contradictoris els càlculs efectius, és a dir truncats, d'algunes de les variables d'un sistema d'equacions intervalars.

Podem il·lustrar millor aquesta situació amb l'exemple següent: Imaginem-nos un circuit com el de la figura 1.1 on tenim un transformador en el qual el circuit primari consumeix una potència X, una part de la qual $(\sigma * X)$ genera calor (és a dir, és l'energia tèrmica produïda pel transfor-

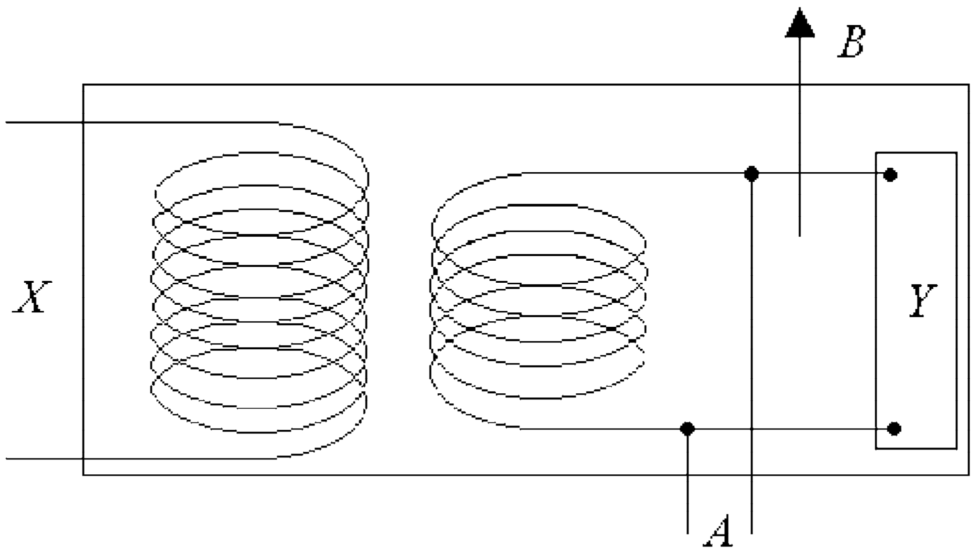

Figura 1.1: Exemple de regulació de potència

mador), i la resta es reparteix entre una demanda elèctrica de potència A, i un refrigerador que consumeix la potència Y, una part de la qual $(\rho * Y)$ també genera calor (és l'energia tèrmica produïda pel motor de refrigeració) i la resta $(1-\rho) * Y$ és l'energia tèrmica substreta per aquest motor de refrigeració. L'energia tèrmica radiada a l'exterior del sistema la representem per B.

Les equacions que descriuen el circuit en un estat estacionari són:

- Equació de balanç elèctric

$$(1-\sigma) * X - Dual\,(Y) = A.$$

- Equació de balanç tèrmic

$$\sigma * Dual\,(X) - (1-2\rho) * Y = B.$$

D'on resulta el sistema

$$\left\{ \begin{array}{rcl} (1-\sigma) * X - Dual\,(Y) & = & A \\ \\ \sigma * Dual\,(X) - (1-2\rho) * Y & = & B. \end{array} \right.$$

Les dues equacions intervalars i les modalitatsmodalitats de X, Y, A i B corresponen a les semàntiques de regulació suposades als dos balanços energètics[1], és a dir, per la primera equació

$$U\,(a, A')\,U\,(y, Y')\,E\,(x, X')\;\; a = (1-\sigma) * x - y$$

i per la segona equació

$$U\,(x, X')\,E\,(b, B')\,E\,(y, Y')\;\; b = \sigma * x - (1-\rho) * y + \rho * y.$$

Així doncs, si prenem

$$\begin{array}{ll} A = [16, 8] & \text{impropi} \\ B = [0.2, 0.4] & \text{propi} \\ \sigma = 0.1 & \\ \rho = 0.1 & \end{array}$$

[1] Un punt interessant en una equació d'aquest tipus és la possibilitat que els valors puntuals hipotètics corresponents a les variables intervalars X i Y, no siguin els mateixos a les dues equacions, traduint els retards d'informació a què respondrien els reguladors X i Y.

amb una aritmètica exacta obtenim

$$X = [20, 10]\,,\; Y = [2, 1]$$

doncs

$$\begin{cases} 0.9 * [20, 10] - [1, 2] & = & [16, 8] \\ \\ 0.1 * [10, 20] - 0.8 * [2, 1] & = & [0.2, 0.4] \end{cases}$$

i la semàntica resultant és

$$\begin{array}{r} U\left(y, [1, 2]'\right) U\left(a, [8, 16]'\right) E\left(x, [10, 20]'\right)\; a = 0.9x - y \\ U\left(x, [10, 20]'\right) E\left(b, [0.2, 0.4]'\right) E\left(y, [1, 2]'\right)\; b = 0.1x - 0.8y \end{array}$$

Suposem que una aritmètica amb truncació ens hagués portat, per X en la primera equació que

$$X = [20, 10] \supseteq [20, 10] + [0.1, -0, 1] = [20.1, 9.9]$$

(truncació interior per garantir la correcta semàntica de f^*) i així resultaria

$$\begin{cases} 0.9 * [20.1, 9.9] - [1, 2] & = & [16.09, 7.91] & \subseteq [16, 8] \\ \\ 0.1 * [9.9, 20.1] - 0.8 * [2, 1] & = & [0.19, 0.41] & \supseteq [0.2, 0.4] \end{cases}$$

d'on es posa de manifest que la segona equació no seria interpretable d'acord amb la semàntica desitjada.

L'estudi que hem portat a terme ens ha obert els ulls a l'existència d'un nou punt de vista intervalar; el d'aquells intervals d'indiscernibilitat en què els seus elements no poden distingir-se entre ells; al contrari del que succeïa tant en els intervals clàssics com en els intervals modals que corresponien a intervals de variació significativa. El nou sistema que resoldrà aquesta problemàtica és el que anomenarem sistema de marques.

1.2 El sistema de marques

Amb les marques pretenem assolir dos objectius. Per un costat, una marca haurà de representar consistentment la informació numèrica en principi "puntual" donada per una escala digital. Així el sistema de marques haurà de tenir una estructura subjacent que ens reflecteixi les pèrdues d'informació que suposa el treballar en qualsevol escala de càlcul, sense necessitat d'haver de preocupar-nos de les truncacions efectives efectuades en aquell treball d'elaboració numèrica.

Aquest objectiu dóna entitat pròpia a la marca i la desvincula del càlcul intervalar; permet de tractar qualsevol informació numèrica elemental sota el punt de vista de les marques, se sap en tot moment si l'evolució de la qualitat de la informació que hi ha hagut en el procés de càlcul és admissible.

La superació del *impasse* intervalar que presenten els sistemes lineals ens obligarà finalment a donar un pas més enllà i definir el conjunt dels intervals modals que tenen com a extrems valors que són marques, i sobre aquests intervals ens caldrà analitzar les diferents operacions.

Per aconseguir ambdós objectius, ens caldrà de bon principi haver construït formalment les marques com a paquets atòmics d'informació sobre una escala digital. Per tal de materialitzar la informació d'aquests àtoms d'informació numèrica, farem ús dels conceptes de centre i de tolerància tècnica relativa de la marca i també dels conceptes de granularitat relativa i de granularitat digital de l'escala. Encara que la indiscernibilitat es tradueix formalment en una identificació de la marca amb un determinat interval, no seria correcte considerar la marca com aquell interval, ja que les operacions definides pels dos tipus de valors no són les mateixes.

Sobre el conjunt de les marques forçosament haurem de definir relacions d'igualtat i de desigualtat sota diversos punts de vista, de les quals caldrà analitzar la semàntica i la relació que aquesta tingui amb el concepte de tolerància relativa.

Un cop estudiades aquestes relacions entre marques, passarem a introduir els conceptes d'operadors sobre marques, així com l'extensió de funcions reals a funcions de marques. A continuació estendrem els intervals modals reals a intervals de marques i per tant, necessitarem redefinir la majoria dels conceptes intervalars per tal que hi tinguin cabuda en aquest nou sistema. Un cop aconseguit aquest objectiu, passem a reconsiderar algunes deficiències que presentava la teoria lineal intervalar i un cop assolida aquesta fita passarem a fer l'estudi del context lineal sota el punt de vista dels intervals de marques.

1.3 Desenvolupament de la tesi. Pla detallat

La tesi que es presenta consta d'aquesta introducció, i de tres capítols i un apèndix que formen el cos de l'estudi que hem dut a terme:

1. Introducció

2. El sistema de les marques
3. Intervals de marques
4. El context intervalar lineal

Apèndix: Resolució de sistemes d'equacions

El pla detallat de la tesi és el següent:

1. Introducció

2. El sistema de les marques

En aquest primer capítol justifiquem i construïm el sistema de les marques, que serà la base per a la posterior extensió dels intervals modals al sistema dels intervals de marques. Els passos seguits en la construcció del sistema de marques s'estructuren de la forma següent

2∘1 Preliminars

- **2∘1∘1 Granularitat digital relativa d'una escala digital de punt flotant normalitzat:** es defineix la separació relativa màxima entre punts contigus d'una escala digital (definició 2.1)
- **2∘1∘2 Rectificacions intervalars:** es defineixen els conceptes de rectificació externa i de rectificació interna d'un interval (definició 2.2) .

2∘2 Escales de marques∘

- **2∘2∘1 El concepte de marca**, que contempla la definició de marca (definició 2.3), i també els conceptes directament utilitzats, com són el de la tolerància tècnica (definició 2.4), granularitat tècnica (definició 2.5) i finalment el tipus d'una marca (definició 2.6)
- **2∘2∘2 Intervals associats a una marca**. On queda clar el rerefons intervalar del sistema de marques que estem descrivint, a partir dels intervals associats a una marca (definició 2.7) i de les propietats d'inclusió que aquests intervals verifiquen (proposició 2.8).
- **2∘2∘3 Indiscernibilitat**, que és el concepte (definició 2.9) que marca la diferència entre l'interval de variació i l'interval associat a una marca.

2.2.4 Acceptabilitat d'una marca, on a partir de la condició mínima de significació d'una marca, es descriuen els conceptes d'index d'imprecisió -i del seu complementari, l'índex de validesa- d'una marca (definició 2.10) a la vegada que expressem aquella condició mínima de significació, com a condició de compatibilitat de la granularitat respecte de la tolerància.

2.2.5 Coercions sobre les marques. Tot i que no tractem totes les possibles coercions que poden fer-se a una marca, ho fem respecte les que considerem més importants. En aquesta subsecció es defineixen els conceptes de restricció d'una marca (definició 2.11) i d'ampliació d'una marca (definició 2.12), relacionats amb els canvis que sofreix una marca en tractar-la des del punt de vista d'escales digitals diferents. Finalment es defineix el concepte de immersió d'una marca en un escala digital (definició 2.13), que en realitat és un cas particular al concepte d'ampliació descrit.

2.3 Relacions en el conjunt de les marques.

Entre les marques que tinguin un tipus comparable, estudiarem les relacions següents

2.3.1 Relacions d'igualtat. Farem distinció entre igualtat material (definició 2.14) heretada de la mateixa relació entre nombres reals i que no deixen de ser el referent de tota estructura intervalar, i la relació d'igualtat dèbil o paramètrica (definició 2.15) que té en compte el caràcter "inexacte" de la marca. De les relacions d'igualtat n'estudiem algunes propietats (proposicions 2.16, 2.17, 2.18, 2.19, 2.20 i corol·lari 2.21) d'entre les quals destacaríem les que reflecteixen la problemàtica de la transitivitat de la relació d'igualtat dèbil entre marques.

2.3.2 Relacions de desigualtat. Arribats a aquest punt estudiem les relacions de desigualtat no estricta material (definició 2.22) i dèbil (definició 2.23) seguint un camí coherent amb les definicions donades per les relacions d'igualtat. Les propietats d'aquestes relacions s'estudien en les posteriors proposicions 2.24, 2.25, 2.26, 2.27 i en el corol·lari 2.28.

2.3.3 Relacions de desigualtat estricta. Finalitzem l'estudi de les relacions entre marques amb els conceptes de les desigualtats estrictes en sentit material (definició 2.29) -concepte que es desprèn de la mateixa desigualtat estricta entre nombres reals- i desigualtat estricta en sentit dèbil (definició 2.30) que es fonamentarà en el concepte de ser distints.

Definim també el concepte de validesa de les relacions estudiades, en funció de la validesa de les marques que es comparen (definició 2.32)

2.4 Operadors de marques.

2.4.1 Operador de marques amb valor sobre $I^*(\mathbb{R})$. Aquesta subsecció és un esglaó que ens facilita un recolzament intervalar dels conceptes que es veuran amb posterioritat. Aquí es defineix el concepte d'operador de marques amb valor intervalar (definició 2.33) i els conceptes d'operadors forts, dèbils, admissibles i racionals també prenent valor intervalar (definició 2.34), definició aquesta última englobada per l'anterior. La idea principal d'aquests operadors és la de donar una relació entre la funció racional intervalar i el càlcul de l'operador de marques que es defineix .

2.4.2 Operador de marques sobre $\mathbb{M}(t, n, b)$. Es defineix ja el que és l'operador pròpiament de marques (definició 2.35); es destacaran també els conceptes d'operadors de marques forts i dèbils (definició 2.36), dels quals s'estudien algunes propietats (proposicions 2.37 i 2.38). Destaquem que el concepte d'operador de marques racional és de gran importància al llarg de la resta del treball.

2.4.3 Operadors aritmètics. La subsecció que ve a continuació consisteix en l'estudi de les diferents operacions aritmètiques entre marques. S'analitzen el producte, el quocient, el màxim, el mínim, la suma amb operands del mateix signe i la suma amb operands de signe diferent (teoremes 2.41, 2.45, 2.48, 2.50, 2.53, 2.56) fent l'estudi per a cada una de les operacions enunciades de les condicions que s'imposen per ser operadors de marques (proposicions restants). Es defineix el concepte de marca inversa (definició 2.42) i malgrat les seves limitacions, també es defineix el concepte de marca simètrica (definició 2.57).

És important destacar dins d'aquesta subsecció el tractament que es dóna a la interpretació semàntica dels càlculs aritmètics realitzats, utilitzant els intervals associats a la marca estudiats a la subsecció 2.2.2 a partir dels quals s'obtenen inclusions intervalars dels càlculs realitzats (teorema 2.58) d'on es dedueix la semàntica intervalar d'operadors racionals de marques (corol·lari 2.59). El teorema següent fa referència a la semàntica d'operadors de marques (teorema 2.60).

2.4.4 Funció de marques. Sense deixar de treballar amb els operadors de marques, l'últim pas ha consistit amb estendre una funció racional contínua real a una funció de marques (definició 2.61) i donar les semàntiques associades a aquestes funcions (teorema 2.65 i proposició 2.66), utilitzant el concepte de marca associada a l'ombra (definició 2.62) i el de tolerància efectiva (definició 2.63).

3. Intervals de marques

Per poder sortir del marc de la truncació intervalar orientada, utilizem les marques definides en l'anterior capítol i ampliem el sistema dels intervals modals al dels intervals modals de marques. El procés que seguim en aquesta extensió té dues vessants: una primera paral·lela al procés de la completació reticular del conjunt dels intervals modals, en la qual posem els principis bàsics de l'estructura dels intervals de marques; i una segona en la qual es tracten els aspectes relacionats amb els càlculs a través dels intervals de marques.

El contingut desglossat d'aquest segon capítol és

3.1 Construcció del conjunt dels intervals de marques. Es parteix del concepte d'interval ordinari de marques (definició 3.1), com extensió dels intervals clàssics. Per seguir el procés paral·lel al de la completació de $I^*(\mathbb{R})$, es defineix el conjunt de predicats sobre el conjunt de marques d'un mateix tipus, (definició 3.2), i a continuació es defineix el concepte d'interval modal de marques (definició 3.3).

Arribat aquest punt, els conceptes que es defineixen tot seguit tenen clarament el seu referent en els conceptes paral·lels de $I^*(\mathbb{R})$; són els de quantificador modal (definició 3.4), conjunt de predicats d'un interval de marques (definició 3.5), coordenades i notacions canòniques dels intervals modals (definicions 3.7 i 3.8). Trencant amb aquesta línia de construcció paral·lela entre intervals de marques i intervals modals, els conceptes que s'exposen a continuació els requereix la presència de la granularitat en les escales de marques. Ens referim a la immersió d'un interval en una escala de marques i a les projeccions reals externa i interna d'un interval de marques (definicions 3.9, 3.10 i 3.11). Acabem la part general d'aquesta construcció definint els conjunts d'intervals e-xistencials, universals i puntuals (definició 3.12) i introduint la notació canònica dels intervals de marques (lema 3.13)

3.1.1 Relacions d'inclusió i igualtat. Partim de la inclusió i de la igualtat dels intervals de marques utilitzant les mateixes relacions pels conjunts de predicats d'intervals de marques (definició 3.14) i s'analitza aquesta inclusió segons la modalitat (proposició 3.15) i després d'analitzar-ne algunes propietats (proposició 3.16), passem a expressar la inclusió a partir de les coordenades canòniques (corol·lari 3.17) Les relacions dèbils entre marques obren la porta al estudi d'unes noves relacions entre intervals de marques: les relacions dèbils (definició 3.18, propietats i proposicions 3.19 i 3.20). Acabem aquesta subsecció donant el significat semàntic de la inclusió d'intervals de marques segons la seva modalitat (proposició 3.21).

3.1.2.Relacions de desigualtat. Definim les relacions de desigualtat no estricta material (definició 3.22) i les desigualtats en sentit dèbil (definició 3.23). A continuació passem a donar les seves propietats (proposicions 3.24, 3.25 i 3.26).

3.1.3 Dualitat. El concepte de la dualitat requereix les definicions de copredicat d'un interval, operador dual i la relació entre copredicats d'un interval i predicats del seu dual (definicions 3.27, 3.28 i lema 3.29). Acabem aquesta subsecció amb propietats relacionades amb el concepte de la dualitat (lema 3.30)

3.1.4 Reticles intervalars. La completació reticular del conjunt dels intervals modals comportarà també aquesta completació pels intervals de marques amb les relacions definides anteriorment. Comencem definint els conceptes dels operadors màxim i de mínim (definició 3.31) elements que doten al conjunt dels intervals de marques d'estructura de reticle per la relació de desigualtat (proposició 3.32). Les relacions d'inclusió entre intervals de marques doten també a aquest conjunt d'estructura de reticle (proposició 3.34), un cop definits els elements meet i join (definició 3.33) d'una família d'intervals.

3.1.5 Predicats i copredicats intervalars. Acabem la secció en què estem construint el conjunt dels intervals modals de marques definint el conjunt de predicats i copredicats intervalars (definicions 3.38 i 3.39) i els conjunts de predicats intervalars acceptats o rebutjats per un interval (definicions 3.40 i 3.41). La proposició 3.37 analitza també propietats relacionades amb l'operador meet - join (definició 3.35), acabant amb els conceptes dels operadors propi i impropi (definició 3.42) i veient algunes propietats (lema 3.43 i proposició 3.44).

3.1.6 Intervals k-dimensionals. Hi fem un breu esment a la generalització k-dimensional dels aspectes estudiats.

3.2 Extensió intervalar de funcions de marques. En una primera part fem un tractament conjuntista a les extensions intervalars. Es defineix el concepte d'extensió unida a una funció (definició 3.45) i es defineixen també els operadors intervalars conjuntistes de marques (definició 3.46). A partir d'aquesta definició es formula el càlcul dels operadors intervalars conjuntistes elementals (proposició 3.47). Utilitzant aquests conceptes, podem passar a definir l'extensió racional conjuntista (definició 3.48) i a analitzar les principals inclusions com són la inclusió existent entre l'extensió racional conjuntista amb l'extensió unida (proposició 3.49) i la propietat d'inclusivitat de l'extensió racional conjuntista (proposició 3.50). Acabem donant la interpretació semàntica d'aquesta extensió (proposició 3.51).

3.2.1 Extensions semàntiques sobre el conjunt dels intervals modals de marques. Definim el concepte d'extensió intervalar pobra (definició 3.52), donant la seva semàntica (proposició 3.53), i definim les extensions semàntiques intervalars (definició 3.54).

3.2.2 Funcions semàntiques. Definim les funcions $*$ i $**-$semàntiques de l'anàlisi intervalar modal (definicions 3.55 i 3.56), base de tota posterior interpretació semàntica d'un càlcul.

3.2.3 Teoremes semàntics. Cada un dels teoremes semàntics s'estudia en una doble vessant: per un sistema calculat i per un sistema exacte. Aquest estudi el fem pel teorema $*$-semàntic (teorema 3.57 i corol·lari 3.58) i pel teorema $**$-semàntic (teorema 3.59 i corol·lari 3.60)

3.2.4 Propietats de les funcions $*$ i $**-$semàntiques. En aquesta subsecció comencem analitzant propietats d'inclusivitat de les funcions $*$ i $**-$semàntiques (teoremes 3.61, 3.65 i 3.66); algunes d'aquestes propietats requereixen demostracions prèvies (lemes

3.62, 3.63 i 3.64). Amb tot aquest instrumental d'inclusions i de desigualtats obtinguts i utilitzant els conceptes de punt i de valor de sella (definicions 3.67 i 3.68) enunciem i demostrem la condició necessària de commutativitat Join - Meet per una funció de marques sobre un interval (teorema 3.70), recolzant-nos en les propietats del punt de sella (lema 3.69). Aquest teorema predisposa a definir el concepte de funció JM-commutativa (definició 3.71) i a plantejar-ne una forma simplificada de càlcul (teorema 3.72).

3.2.5 Funcions racionals modals. Definim les $*-$ i $**-$ extensions racionals modals d'una funció de marques (definicions 3.73 i 3.74) i la relació existent entre ambdues (lema 3.75). A continuació es fa un estudi d'interpretabilitat (lema 3.77) quan no hi ha multiincidències impròpies. La $*-$ i la $**-$ interpretabilitat de les funcions racionals, relacionant aquestes amb les $*-$ i $**-$ funcions semàntiques, està desarrollada en els teoremes 3.78 i 3.79.

Definim operador racional i operador calculat (definicions 3.80 i 3.82) i, per extensió, els conceptes de funció racional modal i funció racional modal calculada (definició 3.83). Estudiem seguidament diferents relacions d'igualtat dèbil i d'inclusions relacionades amb les funcions definides (teoremes 3.81, 3.84, 3.85, 3.87 i corol·laris 3.86, 3.88 i 3.89). Finalitza aquesta subsecció amb la semàntica de funcions racionals calculades sense aplicar criteris maximalistes en el càlcul de la granularitat (teorema 3.90).

3.2.6 Operacions aritmètiques d'intervals de marques. A partir de tot l'estudi realitzat al llarg de la secció, podem expressar les operacions aritmètiques suma, diferència, producte tret dels casos excepcionals i quocient entre intervals de marques a partir dels seus extrems.

4. El contexte lineal intervalar

El conjunt dels intervals modals, quan es tracta sota el punt de vista de la linealitat, té una nova estructura que requereix un estudi particular no solament pel que fa referència a les operacions sinó també de forma especial a la semàntica i a la problemàtica de la truncació. En aquest capítol fem aquest estudi de les operacions i de les seves propietats i avancem en aquest camp de la linealitat estudiant les extensions de funcions i les semàntiques.

4.1 Les operacions lineals.

4.1.1 Suma lineal intervalar. Hi definim la suma lineal de dos intervals (definició 4.1)

4.1.2 Producte semilineal. Encara que el producte lineal podria definir-se directament a partir dels extrems dels intervals operands, el procés constructiu del producte lineal té com antecedents els conceptes de producte semilineal d'un escalar per un interval (definició 4.2) i de producte semilineal de dos intervals (definició 4.3). Estudiem també en aquesta subsecció les propietats del producte semilineal de dos intervals i donem una regla de càlcul d'aquest producte a partir dels extrems dels intervals que operem.

4.1.3 Producte lineal. En aquesta subsecció es defineix el producte lineal de dos intervals (definició 4.4) a partir del producte semilineal vist anteriorment i s'expressa a partir de les coordenades suprem i ínfim dels intervals. Es defineix també el que hem anomenat producte lineal estès (definició 4.5) que aborda el producte lineal de dos intervals qualssevol.

4.1.4 La diferència lineal. Definim la diferència lineal (definició 4.6) i ressaltem la relació entre la diferència aritmètica i la lineal, operacions que no coincideixen.

4.1.5 El quocient lineal. Definim el quocient lineal (definició 4.7) i fem esment del quocient lineal estès.

4.2 Estructures algèbriques.

4.2.1 Propietats de la suma: El grup $(I^*(\mathbb{R}), +)$. S'enumeren les propietats que compleix la suma lineal dels intervals modals, sense entrar en detall, donat que operativament aquesta suma coincideix amb l'aritmètica.

4.2.2 Propietats del producte lineal: El semigrup $(I^*(\mathbb{R}), \circ)$. S'enumeren les propietats del producte lineal.

4.2.3 L'anell dels intervals modals amb les operacions lineals: $(I^*(\mathbb{R}), +, \circ)$. A partir dels resultats vistos en les anteriors subseccions, es té l'estructura d'anell dels intervals modals amb les operacions lineals.

4.2.4 Altres propietats de les operacions lineals. On estudiem altres propietats de les operacions lineals.

4.3 Semàntica lineal. En aquesta secció es fa l'estudi de la interpretació semàntica dels càlculs intervalars amb operacions lineals. Analitzem la semàntica de cada una de les operacions lineals: la semàntica de la suma lineal (proposició 4.8) i les semàntiques que d'ella es dedueixen (corol·lari 4.9) a més de les de la diferència (corol·laris 4.10 i 4.11). A continuació s'estudia la semàntica del producte lineal (proposició 4.12), de l'element invers (corol·lari 4.13), del quocient lineal (proposició 4.14) i del producte lineal estès (proposició 4.15)

4.4 Funcions racionals amb operadors lineals.

4.4.1 Extensió racional amb operadors lineals d'una funció racional contínua. Definim l'extensió racional lineal d'una funció racional (definició 4.16) i donem el seu càlcul a partir de les coordenades dels intervals operands (proposició 4.17).

4.4.2 Semàntica de les extensions racionals. Donem en aquesta subsecció diferents interpretacions semàntiques de càlculs racionals lineals, adequats a diferents situacions freqüents en càlculs lineals. Així s'estudia la interpretació semàntica d'extensions racionals lineals amb una variable uniincident (proposició 4.18), la interpretació semàntica per funcions afins (proposició 4.19), la semàntica de funcions racionals contínues (proposició 4.20).

4.4.3 Semàntica d'expressions $A_1 \circ B_1 + \cdots + A_k \circ B_k$. Encara que l'anterior subsecció tracta la semàntica de molts càlculs lineals, en aquesta definim el concepte de forma canònica (definició 4.21) i estudiem la semàntica d'aquestes expressions (proposició 4.22), de gran importància en els sistemes d'equacions lineals amb operacions lineals.

4.5 Intervals de marques i càlculs lineals.

4.5.1 El problema de les truncacions. En aquesta subsecció es presenta la problemàtica de la truncació orientada dels càlculs intervalars lineals.

4.5.2 Càlculs lineals entre intervals de marques. Definim el concepte d'extensió racional lineal sobre intervals de marques (definició 4.23) utilitzant l'extensió racional lineal que s'ha estudiat abans.

4.5.3 Semàntiques dels càlculs lineals a $I^*(\mathbb{M})$. Les diferents semàntiques per càlculs lineals en el context dels intervals de marques s'inicia amb l'estudi amb la semàntica de funcions racionals contínues (proposició 4.24) i amb la semàntica minimalista (proposició 4.25). Seguidament analizem la parametrització dels intervals de marques (lema 4.26) per poder-ne deduir la semàntica d'extensions lineals sobre intervals de marques i variable uniincident (proposició 4.27), semàntica per funcions afins sobre intervals de marques (proposició 4.28) i la semàntica d'expressions $\mathfrak{A}_1 \circ \mathfrak{B}_1 + \ldots + \mathfrak{A}_k \circ \mathfrak{B}_k$ (proposició 4.29).

Apèndix: Sistemes d'equacions lineals intervalars

Comencem fent un plantejament general del que suposa la resolució d'un sistema lineal sota el punt de vista de les operacions aritmètiques i de les operacions lineals. Un cop feta aquesta visió, s'inicia l'estudi dels sistemes d'equacions intervalars amb operacions aritmètiques plantejant-nos objectius i donant pautes teòriques per avançar en la resolució. Analitzem el problema de la igualació dels coeficients d'una incògnita i per això utilitzem la proposició A.1 en la qual s'estudia el producte d'una equació per un interval, i la reducció d'un coeficient impropi a la unitat a partir de la proposició A.3. Un cop aconseguida la igualació de coeficients corresponents a la mateixa incògnita, s'estudia l'eliminació d'una incògnita en el sistema utilitzant els lemes A.4, A.5 i la proposició A.6, en la qual s'analitza la diferència d'equacions coeficient a coeficient.

A continuació s'estudien els sistemes intervalars amb operacions lineals exposant la transformació d'un sistema lineal amb operacions lineals a un sistema lineal d'intervals de marques també amb operacions lineals. Feta aquesta transformació, separem el sistema inicial en dos subsistemes per ínfims i per suprems.

Voldria finalment dedicar unes paraules d'agraïment a totes aquelles persones que, amb el seu ajut, han fet possible l'elaboració d'aquesta tesi. Em sento sobretot en especial deute amb Ernest Gardeñes que, amb la seva paciència i comprensió, ha estat el pilar fonamental que ha permès realitzar aquest treball.

Capítol 2

El sistema de les marques

Quan treballem en qualsevol escala digital -i no només en escales de càlcul, sinó també en escales materials com són les escales de lectura i d'escriptura- no podem considerar que els valors digitals amb els quals treballem efectivament siguin valors exactes. Cada cop que efectuem la lectura d'una mesura o cada cop que avaluem una expressió numèrica, el valor obtingut ha de ser associat a una zona en la qual els nombres reals que hi pertanyen són indiscernibles entre ells respecte de l'escala en què treballem; per tant, cada punt d'aquella zona pot ser considerat amb igual dret com el valor de la mesura efectuada o del resultat del càlcul realitzat. Aquestes zones de punts indiscernibles pel criteri de validesa que sigui oportú ens porten al concepte de *marca numèrica.*

Tot i que la marca portarà associat un interval impropi, com es justificarà més endavant, la seva essència no és l'interval, sinó una "taca" sobre els reals a què pretén representar. És en aquest sentit que parlarem de *tolerància tècnica relativa* i de *granularitat tècnica -o efectiva- relativa* per designar els paràmetres que determinaran el caràcter de la indeterminació associada a aquestes "taques": les marques numèriques.

La diferència essencial entre l'interval i la marca és que l'interval és un marge d'indeterminació tal que els valors que conté són en principi distingibles o isolables, mentre que la marca correspon a un marge d'indiscernibilitat, en què no té sentit la possibilitat de distingir o d'isolar els valors que hi puguin pertànyer.

Naturalment que conceptes intervalars com la igualtat i les desigualtats seran utilitzats en el sistema de les marques, en principi com a eines constructives i, degudament modificats, com a relacions pròpies del nou sistema.

Donat que la marca voldrà ser el representant d'un valor numèric, si calgués referir-nos als seus elements "reals", prenent la marca com a interval, ho faríem com a *lectures de la marca*, protegint-nos sempre d'efectuar operacions que pressuposin la comparació de lectures diverses d'una mateixa marca.

En aquest capítol seran també tractades les relacions de desigualtat entre marques i finalment ens introduirem en l'estudi dels operadors sobre marques. Aquest estudi dels operadors es veurà completat amb la definició i càlcul d'extensions de funcions racionals reals sobre funcions racionals de marques.

2.1 Preliminars

En aquest estudi utilitzarem diverses escales digitals que ens caldrà especificar. Ens referirem a les que anomenarem escales materials -que englobaran les escales de lectura i d'escriptura de valors numèrics- i a les escales de càlcul -escales computacionals- Ambdós tipus d'escales se suposaran englobades en el context de les escales digitals de punt flotant.

Per a les escales de punt flotant i quan sigui necessari especificar el seu nombre de xifres, utilitzarem la notació DI_n representant els nombres digitals amb $n+1$ xifres a la mantissa de la forma $a_0.a_1 \cdots a_n * b^m$ on $b = 10$ i $a_i \in \{0, 1, \ldots, 9\}$ si es tracta d'escales manuals, o $b = 2$ i $a_i \in \{0, 1\}$ si l'escala és de càlcul, essent en ambdós cassos $a_0 \neq 0$ quan el valor del nombre sigui diferent de zero.

Al llarg d'aquest capítol farem sovint referències a intervals de la forma

$$[1 + \xi, 1 - \xi]\,,\ \xi \in \mathbb{R},\ \xi \geq 0,$$

que, per abreujar, representarem per $(1 \pm \xi)$. Amb això, l'interval conjuntista associat el podem representar per $(1 \pm \xi)'$.

2.1.1 Granularitat digital relativa d'una escala digital de punt flotant normalitzat

Definició 2.1 ***(Granularitat o pas digital relatiu)***
Definim el concepte de ***granularitat digital relativa (o pas digital relatiu o ϵ de l'escala)*** *d'una escala de punt flotant, que representem per g_d, com el valor de la màxima separació relativa entre dos punts consecutius de l'escala, distints de valors excepcionals.*

Sobre una escala digital DI_n, el valor de la granularitat digital relativa és b^{-n} (que s'assoleix pels valors amb mantissa de la forma $1.0 \cdots 0$).

Per un valor $x \in \mathbb{R}$, expressat en la notació del punt flotant, la seva materialització immediata (suposada possible) sobre una escala digital DI_n, la simbolitzem per $c = di\,(x) \in DI_n$ i haurà de complir que

$$c \in x * \left(1 \pm \tfrac{b^{-n}}{2}\right)'$$

fet que és compatible amb una aritmètica amb arrodoniment. (Amb la mateixa condició es complirà també que $x \in c * \left(1 \pm \frac{b^{-n}}{2}\right)'$).

Exemple: En l'escala digital DI_4 amb $b = 2$, la granularitat digital relativa la calculem a partir de

$$\max\left\{\left|\frac{x_i - x_{i-1}}{x_i}\right|, \left|\frac{x_i - x_{i+1}}{x_i}\right|\right\},$$

i seria

$$1.1111 * 2^{k-1} \le x_i \le 1.0001 * 2^k, \begin{cases} \left|\dfrac{x_i - x_{i+1}}{x_i}\right| = 2^{-4} \\ \left|\dfrac{x_i - x_{i-1}}{x_i}\right| = 2^{-5} \end{cases}$$

($|x_i - x_{i-1}|$ i $|x_i - x_{i+1}|$ són iguals llevat del cas en què la mantissa val 1.0000, és a dir, és potència de 2, i en aquest cas particular $|x_i - x_{i-1}| = |x_i - x_{i+1}|/2$).

Òbviament estem suposant que l'escala digital de suport és una escala de punt flotant normalitzat. Suposarem habitualment que $b = 2$.

2.1.2 Rectificacions intervalars

Definició 2.2 ***(Rectificacions intervalars)***

En una escala digital DI_n, definim

1. ***Rectificació externa*** *d'un interval $Y \in I^*(\mathbb{R})$, és qualsevol interval que representarem per $Outr\,(Y) \in I^*(DI_n)$, que sigui la truncació externa de l'interval Y, i que conservi la modalitat:*

$$Outr\,(Y) := (Out\,(Y) \supseteq Y,\ \mathrm{mod}\,(Out\,(Y)) = \mathrm{mod}\,(Y)).$$

2. ***Rectificació interna*** *d'un interval $Y \in I^*(\mathbb{R})$, és aquell interval que representem per $Innr\,(Y) \in I^*(DI_n)$, que és la truncació interna de l'interval Y que conservi la modalitat:*

$$Innr\,(Y) := (Inn\,(Y) \subseteq Y,\ \mathrm{mod}\,(Inn\,(Y)) = \mathrm{mod}\,(Y)).$$

Donat que $Outr\,(Y)$ i $Innr\,(Y)$ han de prendre valors sobre una escala digital determinada, pot ser que per un Y determinat, no existeixi alguna de les rectificacions, posat que en el procés de truncació pot haver-hi canvi de modalitat.

Les rectificacions externa i interna, cas que existeixin les dues, compleixen que

$$Innr\,(Y) \subseteq Y \subseteq Outr\,(Y)$$

i per tant, si $fR\,(X)$ és un càlcul racional intervalar, i si es compleix

$$fR\,(X) \subseteq Outr\,(fR\,(X))\,,$$

la $*-$interpretació semàntica [33, pàg 25, 26 i 27] corresponent a $fR\,(X) \subseteq Outr\,(fR\,(X))$ no només es conservarà sobre $Outr\,(fR\,(X))\,,$ sinó que el prefix de quantificador corresponent a $Outr\,(Y)$ serà el mateix que el que correspondria al valor original $fR\,(X)$[1].

2.2 Escales de marques

2.2.1 El concepte de marca

Definició 2.3 ***(Marca digital)***

Una ***marca*** *sobre una escala digital DI_n és un objecte $\langle c, t, g, n, b \rangle$ constituït pels següents atributs:*

- *El* ***centre*** *de la marca, $c \in DI_n$.*
- *La* ***tolerància tècnica relativa*** *o* ***tolerància*** *de l'escala, $t \in \,]0, 1[$.*
- *La* ***granularitat tècnica*** *-o* ***efectiva****- de la marca, $g \in [0, 1[\,.$*
- *El nombre natural n igual al nombre de dígits fraccionaris de la mantissa de l'escala DI_n, i que determina la granularitat digital relativa b^{-n}.*
- *La base b de l'escala digital de suport DI_n.*

Definició 2.4 ***(Tolerància tècnica)***

Es defineix la ***tolerància tècnica*** *com aquell nombre positiu $t \in \,]0, 1[\,,$ que ens indica la més gran separació relativa entre els punts (reconeguts com indiscernibles) de la marca i el centre de la marca. Exigirem que $1 > t > g \geq b^{-n}$, essent DI_n l'escala de suport.*

[1] En el cas de la truncació interna de $fR\,(X)$ són vàlides, evidentment, les proposicions duals.

Definició 2.5 ***(Granularitat tècnica -o efectiva-)***

Es defineix la ***granularitat tècnica -o efectiva-*** *d'una marca com aquell nombre positiu* $g \in [0,1[$*, que és admissible com a unitat de mesura empíricament raonable de la tolerància tècnica. Recordem l'exigència* $1 > t > g \geq b^{-n}$ *esmentada en la definició anterior.*

Exemple: Utilitzem un voltímetre per la determinació del voltatge d'una font. En el context de les escales de marques, és lògic prendre com a centre de la marca el valor de la lectura obtinguda. En aquest cas, la granularitat tècnica està determinada per la codificació dels valors de l'escala de l'aparell de mesura, mentre que la tolerància tècnica ens vindrà donada per la precisió significativa de la font. S'imposa que la granularitat tècnica sigui una fracció de la tolerància tècnica si volem que la marca tingui sentit. Essencialment, la granularitat tècnica és un paràmetre de vigilància de si la tolerància tècnica manté el seu caràcter significatiu per a les mesures obtingudes amb el voltímetre utilitzat, fet que només es donarà si la precisió del voltímetre és més fina que la tolerància de la font.

Definició 2.6 ***(Tipus d'una marca)***

El conjunt de marques sobre l'escala digital DI_n*, amb tolerància tècnica* t *i pas digital* b^{-n}*,el simbolitzarem amb la notació* $\mathbb{M}(t,n,b)$ *i és*

$$\mathbb{M}(t,n,b) := \left\{X := \langle c,t,g,n,b\rangle \mid c \in DI_n,\ g \in \left[b^{-n},t\right[\right\}.$$

Els elements t,n,b *constitueixen els paràmetres del* ***tipus de la marca***[2]*.*

Notacions: A partir de l'anterior definició, escriurem

- $\mathbb{M}(t,n) := \mathbb{M}(t,n,b)$ quan la base sigui prefixada (per a les escales computacionals, habitualment $b = 2$).
- En la representació de la marca $\langle c,t,g,n,b\rangle$ podrem ometre els valors t,n i b quan siguin obvis pel fet de conèixer el tipus de la marca. Així, en referir-nos a la marca $X \in \mathbb{M}(t,n,b)$ podem fer-ho escrivint $X = \langle c,g\rangle$.

Observacions.

[2] La tolerància ha de formar part del tipus perquè, en cas contrari, existiria inevitablement la relació d'inclusió, fet que portaria a cinc alternatives de comparació entre marques $(\leq,\geq,\subseteq,\supseteq,=)$.

1. Les marques sobre la recta real seran marques de la forma $\mathbb{M}\left(t,\infty\right)$ (i per tant, el pas digital relatiu $g_d = 0$) i b és irrellevant.

2. En una escala digital de suport DI_n, el valor n de l'escala hauria de ser tal que el valor del pas digital fos pràcticament irrellevant en el resultat del càlcul. Cal tenir present que les interpretacions es faran, en principi, en termes del tipus $\mathbb{M}\left(t,\infty\right)$.

3. Les marques de la forma $\mathbb{M}\left(0,\infty\right)$ es poden identificar amb una immersió dels nombres reals dins del sistema de marques. Cal remarcar, però, que l'existència de $\mathbb{M}\left(0,\infty\right)$ no és compatible amb la condició $t > g \geq b^{-n}$. Aquesta immersió és, doncs, en principi rebutjable.

4. Encara que per qualsevol valor de la tolerància relativa, la marca $\langle 0,\, t,\, g, n,\, b\rangle$ s'identificaria amb l'interval $[0,0]$, la consistència de les marques com a sistema de càlcul, aconsella mantenir també en aquest cas els altres paràmetres de la marca.

5. En general, les quantitats que provinguin de mesures sobre una escala material seran marques en les quals el centre serà el valor mesurat (la lectura física és ja un procés de truncació digital) i la granularitat tècnica -o efectiva- vindrà donada pel propi aparell de mesura. L'atribució d'una tolerància tècnica serà un acte en principi especulatiu sobre la significació de la magnitud mesurada. El pas digital només s'haurà d'especificar quan aquesta marca hagi de ser utilitzada en un procés de càlcul (es consideri element d'una escala de càlcul)[3].

2.2.2 Intervals associats a una marca

Definició 2.7 ***(Intervals associats a una marca)***
Donada la marca $X = \langle c, t, g, n, b\rangle$ sobre una escala DI_n, anomenem

- ***Interval associat a*** X*, que representem per* $Iv\left(X\right)$ *a l'interval*

$$Iv\left(X\right) := c * \left(1 \pm t\right).$$

[3]Potser la millor manera de fixar la intuïció de la tolerància tècnica i de la granularitat efectiva és considerant el centre de la marca i la tolerància com atributs de l'escala de valors associats al fenomen mesurat, i la granularitat efectiva com un atribut de l'escala de l'instrument de mesura que, en principi, hauria de ser estrictament més fina que l'escala associada al fenomen mesurat. Entenem que l'escala DI_n **és més fina que l'escala** DI_m si $n > m$.

- ***Ombra*** ($\subseteq$ **−modal**) ***exterior*** *d'X, que representem per* $Exsh\,(X)$, *a l'interval*
$$Exsh\,(X) := Iv\,(X) * Prop\,(1 \pm g)\,.$$

- ***Ombra*** ($\subseteq$ **−modal**) ***interior*** *d'X, que representem per* $Insh\,(X)$, *a l'interval*
$$Insh\,(X) := Iv\,(X) * (1 \pm g)\,.$$

Observacions.

1. N'hi ha prou amb l'exigència $t > g$ perquè l'interval $Exsh\,(X)$ sigui impropi, ja que en aquest cas
$$\begin{aligned}(c * (1 \pm t)) * Prop\,(1 \pm g) = {} & c * ((1 \pm t) * [1 - g\,,\,1 + g]) = \\ = {} & c * [(1 + t)\,(1 - g)\,,(1 - t)\,(1 + g)] = \\ = {} & c * [1 + t - g - tg, 1 - t + g - tg]\,^{4},\end{aligned}$$
i quan els extrems de les ombres siguin valors digitals, les ombres seran rectificacions intervalars de $Iv\,(X)$, posat que $Insh\,(X)$ és òbviament impropi.

2. Les definicions de les ombres d'un interval apunten, per una part a un ús de les marques en el context de la lògica *fuzzy* i també a la necessitat d'aplicació del teorema semàntic intervalar en alguns casos en què s'accedeix a l'interval associat a la marca.

3. El qualificatiu interior/exterior es refereix al context intervalar modal i no al conjuntista. Les extensions conjuntistes que comporten cada un d'aquests conceptes exposats són
$$\begin{aligned}Exsh'\,(X) &= Prop\,(Iv\,(X) * [1 - g\,,\,1 + g])\,.\\ Insh'\,(X) &= Prop\,(Iv\,(X) * (1 \pm g))\,.\end{aligned}$$

4. Si $c \in \mathbb{R}$ i $t \in [0, 1[$, podem representar gràficament en el pla intervalar, l'interval associat a la marca $X = \langle c, g \rangle$ de tipus $\mathbb{M}\,(t, \infty)$ com s'il·lustra en la figura 2.1

[4] Es compleix que
$$1 + t - g - tg > 1 - t + g - tg$$
és equivalent a
$$t - g > -\,(t - g)\,.$$

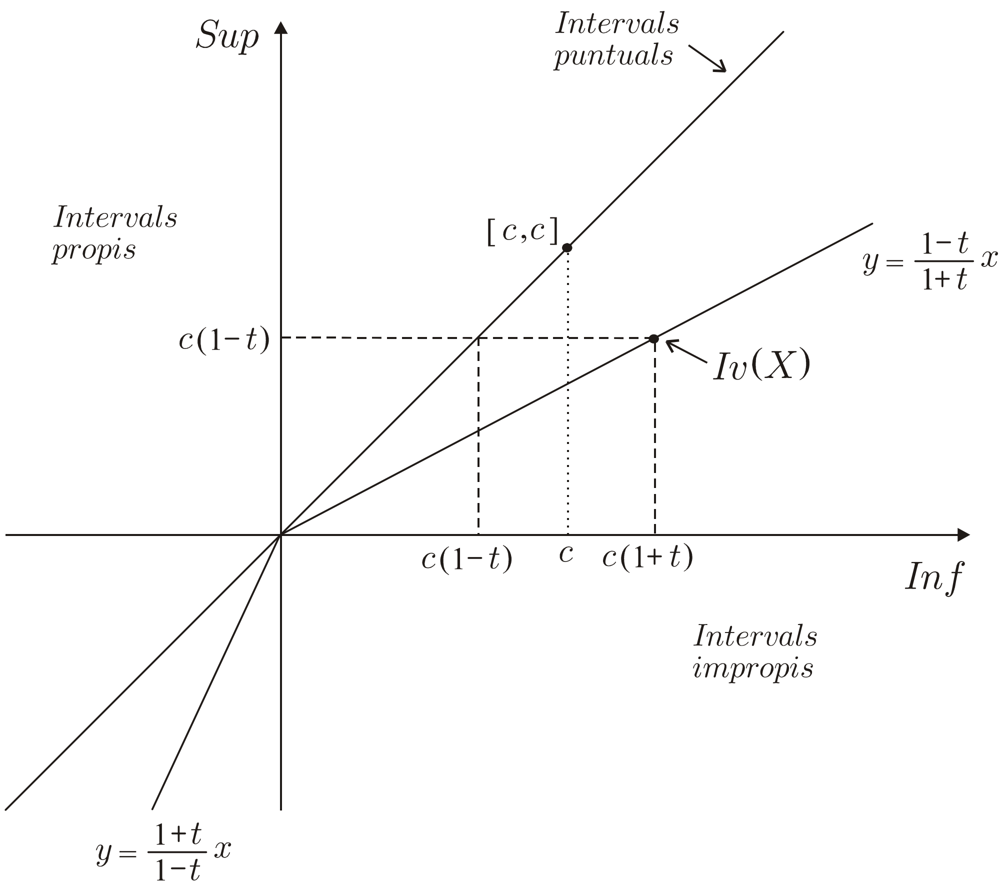

Figura 2.1: Interval associat a la marca $X = \langle c, g \rangle$

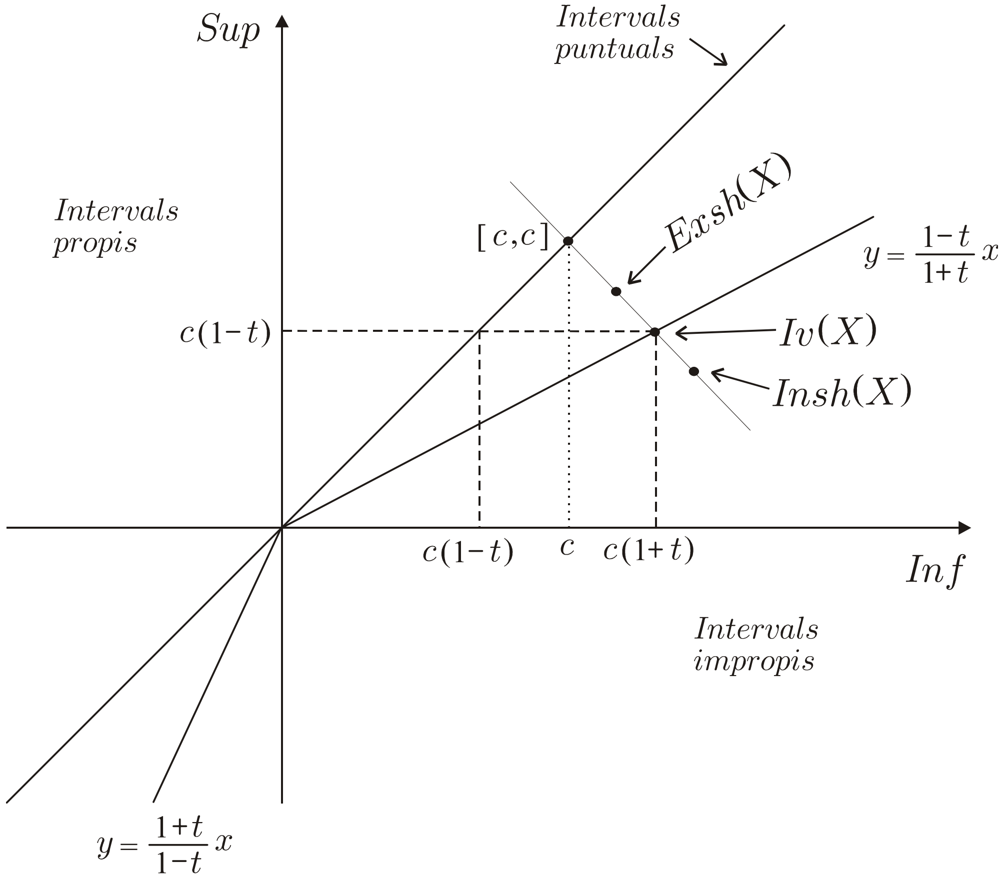

Figura 2.2: Ombres $\subseteq -$modal exterior i $\subseteq -$modal interior d'X

5. Sobre el mateix pla intervalar i per la mateixa marca $X = \langle c, g \rangle \in \mathbb{M}(t, \infty)$ podem representar gràficament també les ombres ($\subseteq$ -modal) exterior i ($\subseteq -modal$) interior d'X, com pot veure's en la figura 2.2

Proposició 2.8 *Donada la marca* $X = \langle c, t, g, n, b \rangle$ *, es compleixen les inclusions conjuntistes*

$$Exsh'(X) \subseteq Iv(X)' \subseteq Insh'(X) .$$

Demostració. Per inclusivitat de les operacions intervalars es verifica

$$Iv(X) * (1 \pm g) \subseteq Iv(X) \subseteq Iv(X) * Prop(1 \pm g) ,$$

i per la modalitat impròpia de cada un d'aquests intervals, les anteriors inclusions modals (Vegeu [30, pàg 4, lema 2.4]) són equivalents a

$$Prop\,(Iv\,(X) * (1 \pm g)) \supseteq Iv\,(X)' \supseteq Prop\,(Iv\,(X) * [1 - g, 1 + g])\,.$$

2.2.3 Indiscernibilitat

Definició 2.9 ***(Marge d'indiscernibilitat. Lectures d'una marca)***
*Donada la marca $X = \langle c, t, g, n, b\rangle$, anomenem **marge d'indiscernibilitat de** X, que representarem per $IndX$, al conjunt*

$$IndX := Prop\,(c * (1 \pm t)) = Prop\,[c \cdot (1 + t)\,, c \cdot (1 - t)]\,.$$

*En referir-nos als punts reals d'$IndX$, ho farem com a **lectures** d'X.*

Observació. La indiscernibilitat entre els elements d'una marca és la que ens porta a assignar a cada element de la marca el seu interval associat. Aquesta assignació podem entendre-la com un procés de fusió de forma que per la marca $X = \langle c, t, g, n, b\rangle$ el representem com l'aplicació

$$\begin{array}{rcc} Fu : IndX & \longrightarrow & I^*\,(\mathbb{R}) \\ x & \longmapsto & Iv\,(X) = c * (1 \pm t)\,. \end{array}$$

No és el mateix la fusió que l'atribució empírica de marques a nombres reals. Per una banda, per a una mesura empírica de marques concreta, un valor de l'escala real pot pertànyer a dues marques distintes alhora. Per altra banda, l'atribució d'una marca al valor real, suposadament indicat per un procés de càlcul o de mesura, podrà estar sotmesa a una norma del tipus de màxima proximitat del valor real al centre de la marca. En canvi, l'aplicació $Fu : IndX \longrightarrow I^*\,(\mathbb{R})$, està definida per a cada marca concreta X, que és el valor empíric efectiu d'una operació de mesura.

2.2.4 Acceptabilitat d'una marca. Condició de significació

Segons es desprèn de la definició de granularitat efectiva (definició 2.5), per tot valor admissible d'una escala de marques, el valor de la tolerància tècnica complirà una condició de significació del tipus $g < t$. Aquesta condició dóna peu als següents indexs:

Definició 2.10 ***(Índex d'imprecisió. Índex de validesa)***
*Anomenem **índex d'imprecisió** d'una marca $X = \langle c, t, g, n, b\rangle$, al quocient $\frac{g}{t}$. El seu complement a ú, $1 - \frac{g}{t}$, el prendrem com un **índex de validesa**, de la marca, que anotem per $v\,(X)$.*

Observacions.

1. Una marca serà *vàlida* quan es compleixi

$$0 < v(X) \leq 1.$$

   La marca serà més acceptable quan major sigui aquest índex, quedant excloses les marques amb $g \geq t$ com identificables amb una classe de valors no definits.

   Òbviament es compleix l'equivalència

$$0 \leq g < t \Leftrightarrow 1 \geq v(X) > 0.$$

2. La condició mínima de significació del tipus $\frac{g}{t} < 1$ la generalitzarem imposant

$$0 \leq g < \alpha t \ \text{ i } \ 0 < \alpha \leq 1,$$

   essent α un patró de validesa del que fins ara sols tenim la restricció $\alpha \in]0,1]$. Quan és compleixi aquesta condició $g < \alpha t$, direm que la granularitat g és **compatible** amb αt.

2.2.5 Coercions sobre les marques.

Definició 2.11 ***(Restricció d'una marca)***

Donades les marques vàlides $X_1 = \langle c_1, t_1, g_1, n_1, b\rangle$ *i* $X = \langle c, t, g, n, b\rangle$, *direm que la marca* X *és una* ***restricció*** *d'*X_1 *quan es compleixi*

- $t \leq t_1$
- $n \geq n_1$
- c *s'obté a partir de* c_1 *afegint zeros en els llocs corresponents a les xifres* $n_1 + 1, \ldots, n$ *de la mantissa.*

parlarem de restricció canònica quan es compleixi a més a més, que

$$g \geq g_1 + b^{-n}$$

Definició 2.12 ***(Ampliació d'una marca)***

Donades les marques vàlides $X_1 = \langle c_1, t_1, g_1, n_1, b\rangle$ *i* $X = \langle c, t, g, n, b\rangle$, *direm que la marca* X *és una* ***ampliació*** *d'*X_1 *quan es compleixi*

- $t \geq t_1$
- $n \leq n_1$
- *c s'obté arrodonint c_1 a n xifres.*

Parlarem d'ampliació canònica quan es compleixi també que

$$g \geq g_1 + b^{-n}$$

Observacions.

1. La restricció i l'ampliació canòniques conserven un màxim de la informació numèrica original.
2. La restricció canònica d'una marca comportarà una disminució de la validesa $\left(1 - \frac{g}{t}\right)$, per l'augment relatiu de la granularitat respecte de la tolerància tècnica. Cal dir també que, en el cas de l'ampliació canònica, posteriors processos de càlcul sobre la marca ampliada provocaran també un augment més important de la granularitat a causa de la menor precisió que comportaria el canvi de l'escala DI_{n_1} a l'escala DI_n.
3. Si $X = \langle c, t, g, n, b \rangle$ és una restricció de la marca $X_1 = \langle c_1, t_1, g_1, m, b \rangle$, es complirà
$$IndX \subseteq IndX_1,$$
donat que
$$IndX = (c * (1 \pm t))' \subseteq (c * (1 \pm t_1))' = IndX_1.$$
Si, en canvi, X fos una ampliació de X_1, la inclusió seria
$$IndX \supseteq IndX_1$$
4. L'associació de les marques amb els intervals impropis fa que l'ampliació, sempre que tinguem marques vàlides, estigui restringida a casos en els quals l'increment de la tolerància tècnica estigui justificada per la precisió més grollera dels procediments tècnics associats amb els càlculs o aplicacions subsegüents.

Definició 2.13 ***(Immersió en una escala digital)***
*Donada la marca $X = \langle c_1, g_1 \rangle \in \mathbb{M}(t, \infty)$, la **immersió de X en l'escala** DI_n és la marca $\langle c, g \rangle \in \mathbb{M}(t, n, b)$ que representem per $DI_n(X)$ en què*

- *c s'obté arrodonint c_1 a n xifres.*
- $g = g_1 + b^{-n}$

Podrem parlar d'immersió d'una marca X en l'escala DI_n, sempre que la marca resultant $DI_n(X)$ sigui vàlida. La immersió d'una marca X en una escala digital és una ampliació d'aquella marca.

2.3 Relacions en el conjunt de les marques.

La marca porta associats dos mecanismes de determinació: un valor digital -el seu centre- i un radi d'indiscernibilitat. Aquests dos constituents essencials de la marca són els que dominaran l'anàlisi de les relacions de desigualtat. Les relacions entre marques calcaran estructuralment les relacions corresponents entre nombres reals: donat que entre nombres reals no existeix la inclusió, tampoc no existirà la inclusió entre marques, fet que s'assegurarà pel fet de ser el radi de la marca un atribut del tipus de la marca.

Definirem, doncs, les relacions entre marques com relacions internes a cada tipus, encara que, com es veurà en el següent capítol, serà necessari realitzar comparacions entre marques calculades (en una escala DI_n) i marques sobre la recta real (DI_∞). L'exigència a l'hora d'efectuar comparacions vindrà donada per la condició que les marques a comparar siguin de **tipus compatibles o comparables**, és a dir, que tinguin la mateixa tolerància, fet que obligarà que qualsevol relació entre marques amb toleràncies diferents hagi de venir mediatitzada per operacions de coerció, i que estiguin suportades per una mateixa base b, per no imposar la necessitat d'operacions de comparació massa complexes. (Aquesta no és una limitació trascendent, posat que, per a les escales computacionals, habitualment serà $b = 2$).

Les definicions que segueixen són una conseqüència d'aquest planteig de principi, i ja no s'hi insistirà més explícitament.

Al llarg d'aquesta secció, ens referirem a marques $X_1 \in \mathbb{M}(t, n_1, b)$, $X_2 \in \mathbb{M}(t, n_2, b)$ i $X_3 \in \mathbb{M}(t, n_3, b)$ amb la mateixa tolerància, encara que no forçosament del mateix tipus, i que designarem per $\langle c_1, g_1 \rangle$, $\langle c_2, g_2 \rangle$ i $\langle c_3, g_3 \rangle$ respectivament[5].

2.3.1 Relacions d'igualtat

[5]Les marques amb mateixa tolerància sense cap mena d'imposició sobre el valor n de l'escala constitueixen un **tipus dèbil** en un nivell superior a les d'un tipus fixat.

Definició 2.14 ***(Igualtat material[6])***

Direm que les marques X_1 i X_2 de tipus comparables són ***materialment iguals*** *i ho representem per $X_1 = X_2$, quan*

$$c_1 = c_2,$$

és a dir, quan els centres coincideixin.

Definició 2.15 ***(Igualtat dèbil o paramètrica)***

Donat un nombre real $\alpha \in]0,1]$, si g_1 i g_2 són compatibles amb αt (vegeu observació 2, pàg 39), direm que les marques X_1 i X_2 són ***dèbilment (o paramètricament) iguals*** *respecte del paràmetre α, i ho representem per $X_1 \approx_\alpha X_2$, quan*

$$\left(c_2 \in Ind\left\langle c_1, \alpha t, g_1, n_1, b\right\rangle \ \underline{or}\ c_1 \in Ind\left\langle c_2, \alpha t, g_2, n_2, b\right\rangle\right).$$

El valor αt que intervé en la igualtat dèbil actua de la mateixa forma que ho fa una tolerància en definir l'interval d'indiscernibilitat. Aquest fet pot induir-nos a pensar que la igualtat dèbil podria definir-se directament redefinint la tolerància d'una marca transformada. El fet que ens ho desaconsella és el d'evitar contínues operacions de coerció entre tipus de marques, així com el manteniment de la referència al significat de la tolerància d'un tipus de marques. La condició de compatibilitat $(g_1 < \alpha t,\ g_2 < \alpha t)$ ens porta almenys que les marques siguin vàlides respecte d'αt. En cas de no exigir-ho, podria haver-hi relacions certes però no vàlides. Fixem-nos que la marca zero (centre nul) només és dèbilment igual a sí mateixa.

Si $\alpha \in]0,1]$ i $X = \langle c, g_c\rangle \in \mathbb{M}(t,\infty)$, el conjunt dels intervals associats a les marques $Y = \langle y, g_y\rangle \in \mathbb{M}(t,\infty,b)$ que compleixen $X \approx_\alpha Y$, podem representar-lo gràficament com es veu a la figura 2.3, en què hem simbolitzat per "A" la regió dels intervals associats a les marques $Y = \langle y, g_y\rangle \in \mathbb{M}(t,\infty,b)$ que compleixen $c \in (y * (1 \pm \alpha t))'$ i per "B" la regió dels intervals associats a les marques $Y = \langle y, g_y\rangle \in \mathbb{M}(t,\infty,b)$ que compleixen $y \in (c * (1 \pm \alpha t))'$. La reunió d'ambdues regions dóna lloc a "C" que correspon a la zona buscada en la qual ens permetem escriure $Iv_\alpha(X)$ o $Ind_\alpha(X)$ per indicar l'interval associat a la marca de centre c i tolerància αt.

Proposició 2.16 *Sigui $X = \langle c_1, g_1\rangle \in \mathbb{M}(t,\infty,b)$. Donat $n \in \mathbb{N}$ i $\alpha \in]0,1]$, si $g = g_1 + b^{-n}$ és compatible amb αt, es compleix que*

$$X \approx_\alpha DI_n(X).$$

[6] Basada en la codificació.

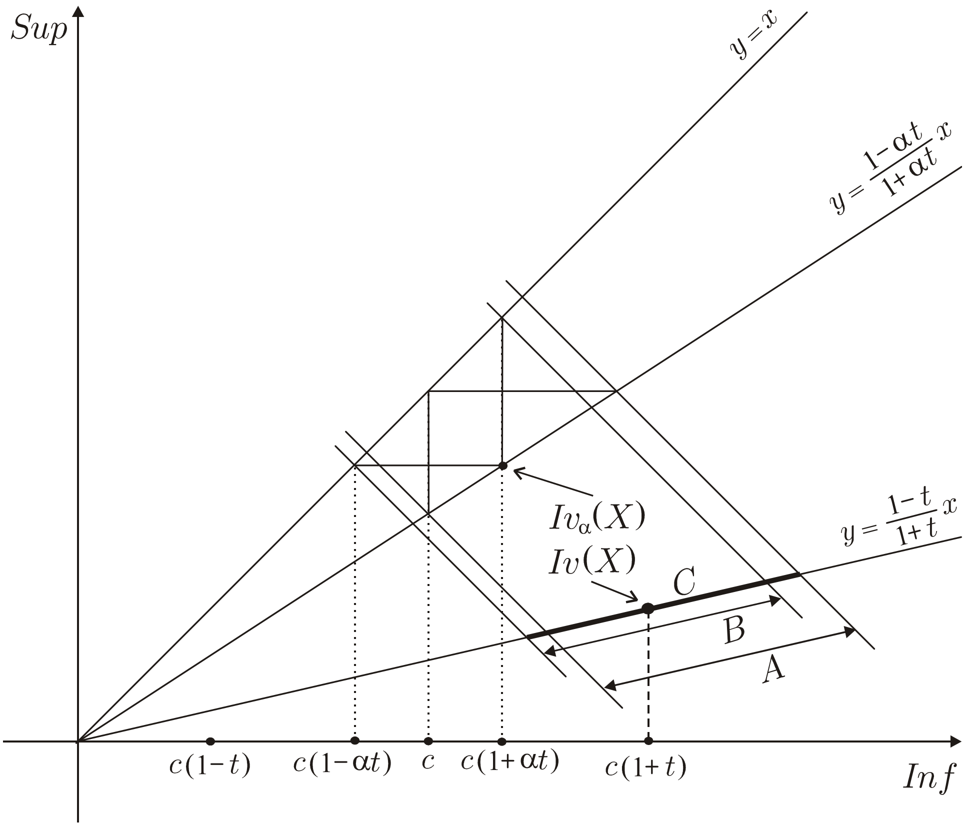

Figura 2.3: Intervals associats a les marques $Y = \langle y, g_y \rangle \in \mathbb{M}\,(t, \infty, b)$, que compleixen $X \approx_\alpha Y$.

Demostració. Per definició, $DI_n(X) = \langle c, g\rangle \in \mathbb{M}(t,n,b)$, és a dir, $c = di(c_1)$ i $g = g_1 + b^{-n}$. La separació relativa entre ambdós punts serà menor que $\frac{g_d}{2} = \frac{b^{-n}}{2}$. Podem suposar sense pèrdua de generalitat que $0 < c < c_1$. Així resultarà

$$c_1\left(1 - \frac{b^{-n}}{2}\right) < c < c_1\left(1 + \frac{b^{-n}}{2}\right)$$

i per tant, ja que g és compatible amb αt, es dedueix que

$$c_1(1-\alpha t) < c_1(1-g) \leq c_1(1-b^{-n}) \leq c_1\left(1 - \frac{b^{-n}}{2}\right) \leq c$$

i

$$c < c_1 < c_1(1+\alpha t)$$

és a dir

$$c_1(1-\alpha t) < c < c_1(1+\alpha t)$$

i finalment

$$\langle c_1, g_1\rangle \approx_\alpha \langle c, g\rangle .$$

Observacions.

1. Si g no fos compatible amb αt, la relació $X \approx_\alpha DI_n(X)$ no seria certa, per manca de validesa, encara que $\frac{b^{-n}}{2}$ fos menor que αt, i que per tant, es complís que $c_1(1-\alpha t) < c < c_1(1+\alpha t)$.

2. L'estructura de les marques apunta fortament a una semàntica que no cal pressionar gaire perquè mostri caràcters decididament borrosos. Aquests caràcters es mantindran, però, en un rerefons de la teoria bàsica, que serà tan *clàssica* com es pugui per a calcar tant com sigui possible l'estructura dels reals. Així, en el cas de la igualtat, com en el cas de les altres relacions que també s'hauran de definir, el valor lògic de la relació $X_1 = X_2$ serà 0 ó 1. Això no impedeix, però, d'introduir un índex de validesa com seria, en aquest cas, la validesa menor d'X_1 i X_2. Aquest concepte es defineix un cop estudiades les relacions entre marques (definició 2.32) Tot i així, no és absurd pensar en un grau de solapament entre marques vàlides, que podria venir donat pel valor

$$\begin{cases} 1 - \dfrac{|c_1 - c_2|}{t \cdot (|c_1| + |c_2|)} & \text{si } IndX_1 \cap IndX_2 \neq \emptyset \\ 0 & \text{altrament,} \end{cases}$$

essent c_1 i c_2 els centres respectius de les marques X_1 i X_2. Si aquest valor és 1, les marques són iguals, i si aquest valor és 0, les marques no són equivalents; simplement la intersecció és nul·la o es redueix a un punt.

Propietats de les relacions de igualtat

Proposició 2.17 *Per a les marques X_1 i X_2 de tipus comparables, donats α i $\beta \in]0,1]$ amb $\alpha \leq \beta$, si g_1 i g_2 són compatibles amb αt, es compleix*

$$X_1 \approx_\alpha X_2 \Rightarrow X_1 \approx_\beta X_2.$$

Demostració. A partir de la definició d'igualtat dèbil.

Proposició 2.18 *Si les marques X_1 i X_2 són materialment iguals, també ho són dèbilment respecte de qualsevol paràmetre $\alpha \in]0,1]$ sempre que g_1 i g_2 siguin compatibles amb αt; és a dir,*

$$X_1 = X_2 \Rightarrow (U(\alpha,]0,1]) \max\{g_1, g_2\} < \alpha t \Rightarrow X_1 \approx_\alpha X_2).$$

Demostració. Sigui $\alpha \in]0,1]$. Si $c_1 = c_2$ tindrem

$$Ind\langle c_1, \alpha t, g_1, n_1, b\rangle = Ind\langle c_2, \alpha t, g_2, n_2, b\rangle.$$

Proposició 2.19 *Per a les marques X_1, X_2 i X_3 de tipus comparables, donat $\alpha \in]0,1]$, si g_1, g_2 i g_3 són compatibles amb αt, es compleix*

$$(X_1 \approx_\alpha X_2, X_2 = X_3) \Rightarrow X_1 \approx_\alpha X_3.$$

Demostració. Tenim

$X_1 \approx_\alpha X_2 := c_1 \in Ind\langle c_2, \alpha t, g_2, n_2, b\rangle$ $\underline{\text{or}}$ $c_2 \in Ind\langle c_1, \alpha t, g_1, n_1, b\rangle$ i
$X_2 = X_3 := c_2 = c_3$.

Si $c_1 \in Ind\langle c_2, \alpha t, g_2, n_2, b\rangle$ i $c_2 = c_3 \Rightarrow c_1 \in Ind\langle c_3, \alpha t, g_3, n_3, b\rangle$.
Si $c_2 \in Ind\langle c_1, \alpha t, g_1, n_1, b\rangle$ i $c_2 = c_3 \Rightarrow c_3 \in Ind\langle c_1, \alpha t, g_1, n_1, b\rangle$.

Proposició 2.20 ***($(\alpha+\beta)$-transitivitat de la igualtat dèbil)***
Per a les marques X_1, X_2 i X_3 de tipus comparables, donats $\alpha, \beta \in]0,1]$ amb $\alpha + \beta \leq 1$, si g_1, g_2 i g_3 són compatibles amb αt i/o βt, segons sigui necessari, es compleix

$$X_1 \approx_\alpha X_2, X_2 \approx_\beta X_3 \Rightarrow X_1 \approx_{\alpha+\beta} X_3.$$

Demostració. Suposem $c_1, c_2, c_3 > 0$. El cas més desfavorable que pot presentar-se és aquell en què $c_1 < c_2 < c_3$ i en què la situació és extrema; és a dir,

$$c_1 = c_2\,(1 - \alpha t)\,,\ c_2 = c_3\,(1 - \beta t)\,,$$

amb què es tindria

$$c_1 = c_3\,(1 - \alpha t)\,(1 - \beta t) = c_3\left(1 - \alpha t - \beta t + \alpha\beta t^2\right),$$

i per tant

$$c_1 > c_3\,(1 - (\alpha + \beta)\,t)\,.$$

Corol·lari 2.21 *(2α-**transitivitat de la igualtat dèbil**)*

Per a les marques X_1, X_2 i X_3 de tipus comparables, donat $\alpha \in \left]0,1\right]$, si g_1, g_2 i g_3 són compatibles amb αt i $2\alpha \leq 1$, es compleix

$$X_1 \approx_\alpha X_2\,,\ X_2 \approx_\alpha X_3 \Rightarrow X_1 \approx_{2\alpha} X_3.$$

Observació. Trivialment es compleix per qualsevol $\alpha \in \left]0,1\right]$ i per qualsevol marca X vàlida respecte αt,

$$X \approx_\alpha X$$

i si X_1 i X_2 són marques amb la mateixa tolerància, $\alpha \in \left]0,1\right]$, essent g_1 i g_2 compatibles amb αt, aleshores

$$X_1 \approx_\alpha X_2 \Leftrightarrow X_2 \approx_\alpha X_1.$$

D'aquesta forma, la relació d'igualtat dèbil entre marques compleix les propietats reflexiva, simètrica i $(\alpha + \beta)$-transitiva.

Podríem haver plantejat la igualtat dèbil entre marques des del punt de vista

$$X_1 \approx_\alpha X_2 := c_1 \in Ind\,\langle c_2, \alpha t, g_2, n_2, b\rangle \ \underline{\text{and}}\ c_2 \in Ind\,\langle c_1, \alpha t, g_1, n_1, b\rangle\,.$$

Aquesta definició no hauria comportat cap canvi sustancial a tot l'estudi de les marques ni al dels intervals de marques (capítol següent) però la relació de 2α-transitivitat estudiada es veuria modificada i adquiriria un caràcter més complex. (Així, la *navalla d'Ockham* decideix en favor de l'operador <u>or</u> en aquest cas)

2.3.2 Relacions de desigualtat

Definició 2.22 ***(Desigualtats materials)***

Donades les marques X_1, X_2 de tipus comparables, direm

1. La marca X_1 és ***materialment menor o igual*** *que la marca X_2, i ho representem per $X_1 \leq X_2$, quan*

$$c_1 \leq c_2.$$

2. La marca X_1 és ***materialment major o igual*** *que la marca X_2, i ho representem per $X_1 \geq X_2$, quan*

$$c_1 \geq c_2.$$

Observacions sobre les relacions $\leq$ i $\geq$:

1. Ambdues relacions $\leq$ i $\geq$ són reflexives, antisimètriques i transitives.
2. Donades les marques X_1 i X_2 de tipus comparables, es compleix
$$X_1 \leq X_2 \Leftrightarrow Iv\left(X_1\right) \leq Iv\left(X_2\right).$$
(La comparació material de centres és equivalent a la comparació e-xacta d'extrems quan els tipus són comparables)
3. Donades dues marques X_1, X_2 de tipus comparables, a partir de l'equivalència entre la desigualtat entre marques i la desigualtat intervalar podem interpretar la desigualtat $X_1 \leq X_2$ com
$$X_1 \leq X_2 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} U\left(x_1, IndX_1\right) E\left(x_2, IndX_2\right)\left(x_1 \leq x_2\right). \\ \text{i} \\ U\left(x_2, IndX_2\right) E\left(x_1, IndX_1\right)\left(x_1 \leq x_2\right). \end{array} \right. \tag{2.1}$$

Definició 2.23 ***(Desigualtat dèbil o paramètrica)***

Per a les marques X_1 i X_2 de tipus comparables, donat $\alpha \in \left]0,1\right]$, si g_1 i g_2 són compatibles amb αt, diem

1. La marca X_1 és ***dèbilment -o paramètricament- menor o igual*** *que la marca X_2 respecte del paràmetre α, i ho representem per $X_1 \preccurlyeq_\alpha X_2$, quan*

$$X_1 \preccurlyeq_\alpha X_2 := \left(X_1 \leq X_2 \ \underline{or}\ X_1 \approx_\alpha X_2\right).$$

2. La marca X_1 és ***dèbilment -o paramètricament- major o igual*** *que la marca X_2 respecte del paràmetre α, i ho representem per $X_1 \succcurlyeq_\alpha X_2$, quan*

$$X_1 \succcurlyeq_\alpha X_2 := \left(X_1 \geq X_2 \ \underline{or}\ X_1 \approx_\alpha X_2\right).$$

Observi's que les condicions $X_1 \leq X_2,\ X_1 \approx_\alpha X_2$ (respectivament $X_1 \geq X_2,\ X_1 \approx_\alpha X_2,$) no són excloents.

Proposició 2.24 ***(Expressió de la desigualtat dèbil a partir de les coordenades)***
Si les marques X_1 i X_2 són de tipus comparables, donat $\alpha \in]0,1]$, si g_1 i g_2 són compatibles amb αt, es compleix

1. $c_2 \geq 0 \Rightarrow (X_1 \preccurlyeq_\alpha X_2 \Leftrightarrow c_1 (1-\alpha t) \leq c_2)$
2. $c_2 \leq 0 \Rightarrow (X_1 \preccurlyeq_\alpha X_2 \Leftrightarrow c_1 \leq c_2 (1-\alpha t))$

Demostració.

1. $\Rightarrow)$

   $X_1 \preccurlyeq_\alpha X_2 \Leftrightarrow$

   $\Leftrightarrow X_1 \leq X_2$ $\underline{or}$ $X_1 \approx_\alpha X_2 \Leftrightarrow$
   $\Leftrightarrow c_1 \leq c_2$ $\underline{or}$ $c_2 (1-\alpha t) \leq c_1 \leq c_2 (1+\alpha t)$
   $\underline{or}$ $c_1 (1-\alpha t) \leq c_2 \leq c_1 (1+\alpha t) \Rightarrow$
   // la primera condició implica $c_1 \leq c_2 (1+\alpha t)$ i $c_1 (1-\alpha t) \leq c_2$
   $\Rightarrow c_1 \leq c_2 (1+\alpha t)$ $\underline{or}$ $c_1 (1-\alpha t) \leq c_2 \Rightarrow$
   // la primera d'aquestes condicions implica la segona
   $\Rightarrow c_1 (1-\alpha t) \leq c_2.$

   $\Leftarrow)$ Suposem $c_1 (1-\alpha t) \leq c_2$. Podem considerar dues situacions

   - $c_1 < c_2$ i per tant, $X_1 \leq X_2$.
   - $c_1 \geq c_2$ i per tant, $c_1 (1-\alpha t) \leq c_2 \leq c_1 \Rightarrow X_1 \approx_\alpha X_2$.

2. $\Rightarrow)$

   $X_1 \preccurlyeq_\alpha X_2 \Leftrightarrow$

   $\Leftrightarrow X_1 \leq X_2$ $\underline{or}$ $X_1 \approx_\alpha X_2 \Leftrightarrow$
   $\Leftrightarrow c_1 \leq c_2$ $\underline{or}$ $c_2 (1+\alpha t) \leq c_1 \leq c_2 (1-\alpha t)$
   $\underline{or}$ $c_1 (1+\alpha t) \leq c_2 \leq c_1 (1-\alpha t) \Rightarrow$
   // la primera condició implica $c_1 \leq c_2 (1-\alpha t)$ i $c_1 (1+\alpha t) \leq c_2$
   $\Rightarrow c_1 \leq c_2 (1-\alpha t)$ $\underline{or}$ $c_1 (1+\alpha t) \leq c_2 \Rightarrow$
   // la segona d'aquestes condicions implica la primera
   $\Rightarrow c_1 \leq c_2 (1-\alpha t)$.

   $\Leftarrow)$ Suposem $c_1 \leq c_2 (1-\alpha t)$. Podem considerar dues situacions

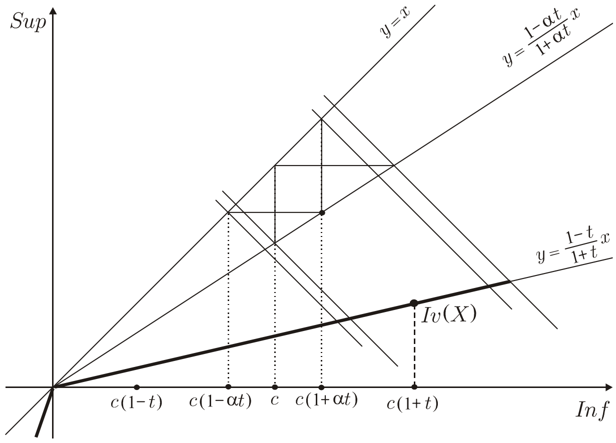

Figura 2.4: Regió dels intervals associats a les marques $Y \in \mathbb{M}(t, \infty, b)$ dèbilment menors o iguals que X.

- $c_1 < c_2$ i per tant $X_1 \leq X_2$.
- $c_1 \geq c_2$ i per tant $c_2 \leq c_1 \leq c_2(1 - \alpha t) \Rightarrow X_1 \approx_\alpha X_2$.

La relació dèbilment menor o igual i la relació menor o igual es descriuen gràficament a les figures 2.4 i 2.5, respectivament.

Propietats de les desigualtats dèbils

Proposició 2.25 *Si les marques X_1, X_2 i X_3 són de tipus comparables, donat $\alpha \in]0,1]$, si g_1, g_2 i g_3 són compatibles amb αt, es compleix*

$$(X_1 \approx_\alpha X_2,\ X_2 \geq X_3) \Rightarrow X_1 \succcurlyeq_\alpha X_3$$

Demostració.

$$\begin{array}{ll} X_1 \approx_\alpha X_2 & := c_1 \in Ind\langle c_2, \alpha t, g_2, n_2, b\rangle \ \underline{or}\ c_2 \in Ind\langle c_1, \alpha t, g_1, n_1, b\rangle . \\ X_2 \geq X_3 & := c_2 \geq c_3. \end{array}$$

•) Suposem $c_1, c_2 \geq 0$. Contemplem a continuació tres possibilitats:

1. $c_2 = c_3$. En aquest cas $X_2 = X_3$. Així utilitzant la proposició 2.19 tenim

$$X_1 \approx_\alpha X_2,\ X_2 = X_3 \Rightarrow X_1 \approx_\alpha X_3$$

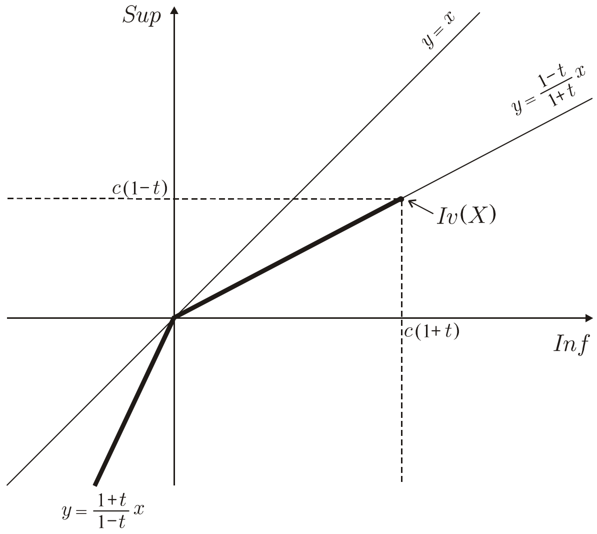

Figura 2.5: Intervals associats a les marques $Y \in \mathbb{M}(t, \infty, b)$ materialment menors o iguals que la marca X.

2. $c_2 > c_3$ i $c_1 \in Ind \langle c_2, \alpha t, g_2, n_2, b \rangle$, tindrem

$$c_3 (1 - \alpha t) < c_2 (1 - \alpha t) \leq c_1 \leq c_2 (1 + \alpha t)$$

i per tant, de la desigualtat $c_3 (1 - \alpha t) \leq c_1$, aplicant la proposició 2.24 es té $X_1 \succcurlyeq_\alpha X_3$.

3. $c_2 > c_3$ i $c_2 \in Ind \langle c_1, \alpha t, g_1, n_1, b \rangle$, d'on resulta

$$c_3 < c_2 \leq c_1 (1 + \alpha t) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow c_3 (1 - \alpha t) < c_1 (1 + \alpha t) (1 - \alpha t) < c_1.$$

i aplicant la mateixa proposició 2.24 tindrem $X_1 \succcurlyeq_\alpha X_3$.

$\bullet$) Si $c_1, c_2 < 0$, procedim de forma similar com hem fet

1. $c_2 = c_3 \Rightarrow X_2 = X_3$ i utilitzant la proposició 2.19 tenim

$$X_1 \approx_\alpha X_2, \ X_2 = X_3 \Rightarrow X_1 \approx_\alpha X_3$$

2. $c_2 > c_3$ i $c_1 \in Ind \langle c_2, \alpha t, g_2, n_2, b \rangle$, tindrem

$$c_3 (1 + \alpha t) < c_2 (1 + \alpha t) \leq c_1 \leq c_2 (1 - \alpha t)$$

i per tant, de la desigualtat $c_3\,(1+\alpha t) \leq c_1$, es dedueix

$$c_3 < c_3\left(1-\alpha^2 t^2\right) \leq c_1\,(1-\alpha t)$$

aplicant la proposició 2.24 es té $X_1 \succcurlyeq_\alpha X_3$.

3. $c_2 > c_3$ i $c_2 \in Ind\,\langle c_1, \alpha t, g_1, n_1, b\rangle$, resulta

$$c_3 < c_2 \leq c_1\,(1-\alpha t)$$

i per la mateixa proposició 2.24 tenim $X_1 \succcurlyeq_\alpha X_3$.

Proposició 2.26 *Si les marques X_1 i X_2 de tipus comparables són materialment desiguals, també ho són en sentit paramètric respecte de qualsevol $\alpha \in \,]0,1]$, sempre que g_1 i g_2 siguin compatibles amb αt; és a dir,*

$$X_1 \leq X_2 \Rightarrow U\,(\alpha,]0,1])\ \max\{g_1, g_2\} < \alpha t \Rightarrow\ X_1 \preccurlyeq_\alpha X_2.$$

Demostració. La desigualtat $X_1 \leq X_2$ ens dóna $c_1 \leq c_2$ i per tant, $X_1 \preccurlyeq_\alpha X_2$.

Proposició 2.27 ***(($\alpha+\beta$)-transitivitat de les desigualtats dèbils)***

Per les marques X_1, X_2 i X_3 de tipus comparables, donats $\alpha, \beta \in \,]0,1]$, essent $\alpha+\beta \leq 1$, si g_1, g_2 i g_3 són compatibles amb αt i/o βt, segons sigui necessari, es compleix

$$X_1 \preccurlyeq_\alpha X_2,\ X_2 \preccurlyeq_\beta X_3 \Rightarrow X_1 \preccurlyeq_{\alpha+\beta} X_3.$$

Demostració. Per definició,

$X_1 \preccurlyeq_\alpha X_2 := X_1 \approx_\alpha X_2$ <u>or</u> $c_1 < c_2$.

$X_2 \preccurlyeq_\beta X_3 := X_2 \approx_\beta X_3$ <u>or</u> $c_2 < c_3$.

Tenim quatre possibilitats

1. $X_1 \approx_\alpha X_2$ i $X_2 \approx_\beta X_3$ i per tant, $X_1 \approx_{\alpha+\beta} X_3$.

2. $X_1 \approx_\alpha X_2$ i $c_2 < c_3$ estem en les hipòtesis de l'anterior proposició 2.25 i per tant, $X_1 \preccurlyeq_\alpha X_3$, és a dir, $X_1 \approx_\alpha X_3$ <u>or</u> $c_1 < c_3$. Si es donés el primer cas, $X_1 \approx_\alpha X_3$, pel fet de ser $\alpha \leq \alpha+\beta$, aplicant la proposició 2.17 tenim $X_1 \approx_{\alpha+\beta} X_3$.

3. $c_1 < c_2$ i $X_2 \approx_\beta X_3$ estem en la mateixa situació d'abans

4. $c_1 < c_2$ i $c_2 < c_3$ aplicant la proposició 2.26, tindríem que per a qualsevol valor $\gamma \in \,]0,1]$ si g_1 i g_3 són compatibles amb γt, $X_1 \approx_\gamma X_3$. En particular podem prendre $\gamma = \alpha+\beta$.

Corol·lari 2.28 *(2α-**transitivitat de les desigualtats dèbils**)*
Per les marques X_1, X_2 i X_3 de tipus comparables, donat $\alpha \in]0,1]$, si g_1, g_2 i g_3 són compatibles amb $2\alpha t$, essent $2\alpha \leq 1$, es compleix

$$X_1 \preccurlyeq_\alpha X_2,\ X_2 \preccurlyeq_\alpha X_3 \Rightarrow X_1 \preccurlyeq_{2\alpha} X_3.$$

Observació. Les relacions de desigualtat dèbil entre marques són

- Reflexives: $X \preccurlyeq_\alpha X$.
- Antisimètriques: $X_1 \preccurlyeq_\alpha X_2$, $X_2 \preccurlyeq_\alpha X_1 \Leftrightarrow X_1 \approx_\alpha X_2$.
- $(\alpha + \beta)$ - transitives.

2.3.3 Relacions de desigualtat estricta

Les idees d'estrictament menor i d'estrictament major van associades a la idea d'elements distints. Això és el que ha conduït, en el cas $I^*(\mathbb{R})$, a desassociar les relacions $<$ i $\leq$; la relació $\leq$ és estructural i la relació $<$, com la $>$, està associada al fet de tenir les projeccions conjuntistes disjuntes i d'estar situats un interval a l'esquerra o a la dreta de l'altre, també conjuntísticament. Si la marca $X_2 \in \mathbb{M}(t, n_2, b)$ ha de ser computacionalment clarament distinta de la marca $X_1 \in \mathbb{M}(t, n_1, b)$, és raonable reconèixer-ho pel fet que cadascun dels centres de les dues marques X_1 i X_2 no és indiscernible del centre de l'altra marca (els centres són discerniblement diferents).

Aquestes idees es formalitzaran amb les següents definicions.

Definició 2.29 ***(Desigualtats estrictes materials)***
Donades les marques X_1, X_2 de tipus comparables, direm
*1. X_1 és **estrictament i material menor** que X_2, i ho representem per $X_1 < X_2$ quan*

$$X_1 < X_2 := Iv(X_1) < Iv(X_2).$$

*2. X_1 és **estrictament i material major** que X_2, i ho representem per $X_1 > X_2$ quan*

$$X_1 > X_2 := Iv(X_1) > Iv(X_2).$$

Propietats de les relacions $<$ i $>$ entre marques.
Donades les marques X_1, X_2 i X_3 de tipus comparables, es té

1. $X_1 \not< X_1,\ X_1 \not> X_1.$

2. $X_1 < X_2 \Leftrightarrow X_2 > X_1.$

3. $X_1 < X_2,\ X_2 < X_3 \Rightarrow X_1 < X_3.$

4. La semàntica que dóna lloc aquesta relació és

$$X_1 < X_2 \Leftrightarrow U(x_1, IndX_1)\, U(x_2, IndX_2)\, (x_1 < x_2)\,.$$

Definició 2.30 ***(Desigualtats estrictes dèbils o paramètriques)***
Per les marques X_1 i X_2 de tipus comparables, donat $\alpha \in]0,1]$, si g_1 i g_2 són compatibles amb αt, direm
1. X_1 és ***dèbilment -o paramètricament- menor*** *que X_2 respecte del paràmetre α, i ho representem per $X_1 \prec_\alpha X_2$ quan*

$$X_1 \prec_\alpha X_2 := (\neg (X_1 \approx_\alpha X_2), c_1 < c_2)\,.$$

2. X_1 és ***dèbilment -o paramètricament- major*** *que X_2 respecte del paràmetre α i ho representem per $X_1 \succ_\alpha X_2$ quan*

$$X_1 \succ_\alpha X_2 := (\neg (X_1 \approx_\alpha X_2), c_1 > c_2)\,.$$

Sota el punt de vista d'aquestes definicions $X_1 \prec_\alpha X_2$ i $X_1 \succ_\alpha X_2$, podem referir-nos a les marques X_1 o X_2 com a marques distingibles a la dreta o a l'esquerra respectivament.

La relació dèbilment menor i la relació estrictament menor, poden representar-se gràficament tal com ho fem en les figures 2.6 i 2.7.

Proposició 2.31 *Per les marques X_1 i X_2 de tipus comparables, donat $\alpha \in]0,1]$, si g_1 i g_2 són compatibles amb αt, es verifica*

$$X_1 \preccurlyeq_\alpha X_2 \Leftrightarrow X_1 \prec_\alpha X_2 \ \underline{or}\ X_1 \approx_\alpha X_2.$$

Demostració.
$\Rightarrow)$
$X_1 \preccurlyeq_\alpha X_2 \Rightarrow c_1 < c_2\ \underline{or}\ X_1 \approx_\alpha X_2.$
Si $\neg (X_1 \approx_\alpha X_2)$ vol dir $c_1 < c_2$ i per tant, $X_1 \prec_\alpha X_2$.

$\Leftarrow)$
Si $X_1 \prec_\alpha X_2 \Rightarrow c_1 < c_2 \Rightarrow X_1 \preccurlyeq_\alpha X_2$.

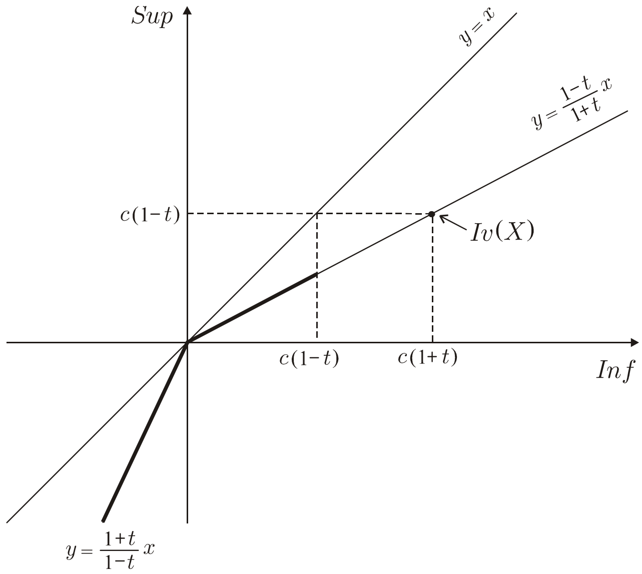

Figura 2.6: Intervals associats a les marques $Y \in \mathbb{M}(t, \infty, b)$ materialment menors que X.

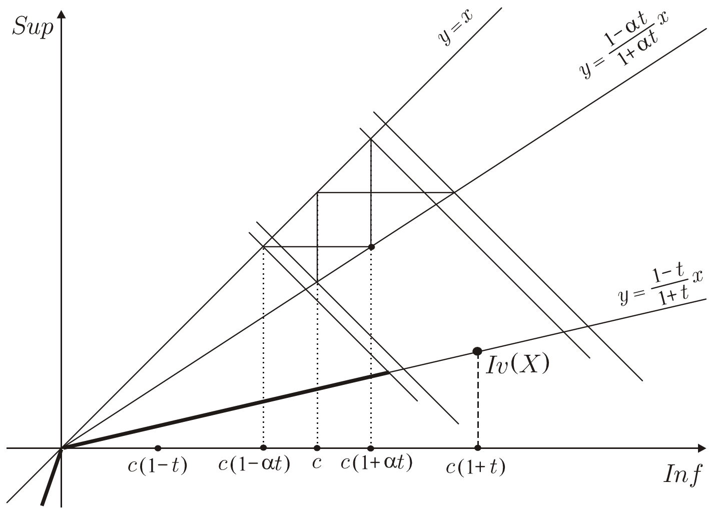

Figura 2.7: Intervals associats a les marques $Y \in \mathbb{M}(t, \infty, b)$ dèbilment menors que la marca X.

Definició 2.32 ***(Validesa de les relacions)***

Si X_1 i X_2 són marques de tipus comparables, parlarem de la ***validesa de les relacions*** *estudiades entre ambdues marques referint-nos al valor*

$$1 - \frac{\max\{g_1, g_2\}}{t}.$$

2.4 Operadors de marques

Abans d'efectuar qualsevol càlcul en una escala computacional, és desitjable tenir en compte que les dades a partir de les quals l'efectuarem provenen, en general, de l'ús d'escales materials; de fet, d'operacions de lectura més o menys indirectes. La necessitat de representar les dades empíriques sobre una escala computacional obliga a un procés d'apreciació en el què la marca quedi apta per a constituir els elements del càlcul. Per tant, si $X_1 = \langle c_1, t_1, g_1, n_1, b\rangle \in \mathbb{M}(t_1, n_1)$ fos una bona representació del valor llegit, en fer-ne la representació sobre l'escala de càlcul DI_n, passarem a tenir la marca

$$X = \langle c, t, g, n, b\rangle,$$

on c és la representació del valor c_1 en l'escala de càlcul $(c = di(c_1))$, t és la truncació per defecte sobre l'escala de càlcul de la tolerància t_1 $(t = \downarrow t_1)$ i g és el valor sobre l'escala de càlcul de la granularitat g_1 $(g \simeq g_1,\ g < t)$.

Llevat que s'especifiqui el contrari, en aquesta secció suposarem en principi que les marques amb les quals operem estan ja codificades sobre l'escala de càlcul.

En tot càlcul entre marques acostumarà a haver-hi una pèrdua de significació que reflectirem sobre la granularitat del resultat i no sobre la tolerància; així perquè el sistema sigui homogeni, el resultat estarà restringit a la mateixa tolerància relativa que les dades. És a dir, tot càlcul de marques és un procés tancat dins d'un mateix tipus i en tot cas serà necessari de coercionar prèviament les dades al tipus comú. Aquesta coerció haurà de ser admissible per a la significació experimental de les dades. La granularitat serà l'encarregada d'absorbir la indeterminació material de l'escala de suport i tindrà una tendència a augmentar. Així i tot, no tindrà en principi cap paper, llevat de marcador de la pèrdua de validesa del procés de càlcul, ja que el creixement pas a pas durant un càlcul de la granularitat tècnica en funció d'n, permet d'invalidar els càlculs en què la influència de la precisió efectiva lligada a n pugui arribar a ser massa gran (de l'ordre de t).

Una altra indicació que ens cal fer és la del tractament dels valors puntuals: l'homogeneïtat del sistema obliga que aquests no puguin aparèixer en el propi sistema. Cal recordar que la marca prové d'una mesura i només és operable amb valors del mateix sistema. Tot valor puntual ha de ser reconvertible a marca i aquesta reconversió representaria l'operació de mesura que caldria fer per a obtenir un valor efectiu experimental a partir d'un valor geomètric (analític) definit en termes de l'anàlisi real o d'un protocol experimental.

Al llarg d'aquesta secció utilitzarem la següent notació: si representem X_1 per $\langle c_1, t_1, g_1, n, b\rangle$ i X_2 per $\langle c_2, t_2, g_2, n, b\rangle$, escriurem $g_{1,2}^M$ en lloc de $\max\{g_1, g_2\}$.

2.4.1 Operadors $\mathbb{M}(t,n,b) \times \mathbb{M}(t,n,b) \to I^*(\mathbb{R})$

Si $\tilde{X}_1 = \langle \tilde{c}_1, t_1, g_1, n_1, b\rangle$ i $\tilde{X}_2 = \langle \tilde{c}_2, t_2, g_2, n_2, b\rangle$ són dues marques amb tipus diferents, per poder operar entre elles en una escala de càlcul DI_n, serà necessari coercionar-les a un tipus comú per mitjà de l'operació de restricció definida anteriorment en 2.2.5, resultant les noves marques $X_1 = \langle c_1, t, g_1, n, b\rangle$ i $X_2 = \langle c_2, t, g_2, n, b\rangle$.

Les marques coercionades a un mateix tipus les anomenarem **marques normalitzades** (són marques normalitzades a un tipus comú), mentre que les altres seran **marques empíriques**.

A partir d'ara suposarem que les marques que constitueixen les dades d'un càlcul són marques normalitzades.

Definició 2.33 ***(Operadors*** $\mathbb{M}(t,n,b) \times \mathbb{M}(t,n,b) \to I^*(\mathbb{R})$***)***
Donada la funció $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ contínua, un ***operador de marques amb valors sobre*** $I^*(\mathbb{R})$ *associat a f, el representem per $f_{\mathbb{MI}}$, i és qualsevol funció de la forma*

$$f_{\mathbb{MI}} : \mathbb{M}(t,n,b) \times \mathbb{M}(t,n,b) \to I^*(\mathbb{R}),$$

tal que si $(X_1, X_2) \in \mathbb{M}(t,n,b) \times \mathbb{M}(t,n,b)$, aleshores

$$f_{\mathbb{MI}}(X_1, X_2) := f\left(x_1^0, x_2^0\right) * (1 \pm t),$$

essent $(x_1^0, x_2^0) \in IndX_1 \times IndX_2$.

Definició 2.34 ***(Operadors*** $\mathbb{MI}$ ***forts, dèbils, admissibles i racionals)***
Siguin $(X_1, X_2) \in \mathbb{M}(t,n,b) \times \mathbb{M}(t,n,b)$ designades per $\langle c_1, g_1\rangle$ i $\langle c_2, g_2\rangle$ respectivament. Donada $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ contínua i tal que $fR(Iv(X_1), Iv(X_2))$

és optimal[7]*, direm*

1. $f_{\mathbb{MI}}(X_1, X_2)$ *és* ***fort*** *per* $\left(x_1^0, x_2^0\right) \in (IndX_1 \times IndX_2)$ *quan*
$$fR\left(Iv\left(X_1\right), Iv\left(X_2\right)\right) \subseteq f\left(x_1^0, x_2^0\right) * (1 \pm t) * \left(1 \pm \tfrac{b^{-n}}{2}\right).$$

2. $f_{\mathbb{MI}}(X_1, X_2)$ *és* ***dèbil*** *per* $\left(x_1^0, x_2^0\right) \in (IndX_1 \times IndX_2)$ *quan*
$$\begin{array}{l} fR\left(Iv\left(X_1\right), Iv\left(X_2\right)\right) \subseteq f\left(x_1^0, x_2^0\right) * (1 \pm t). \\ i \\ fR\left(Iv\left(X_1\right), Iv\left(X_2\right)\right) \nsubseteq f\left(x_1^0, x_2^0\right) * (1 \pm t) * \left(1 \pm \tfrac{b^{-n}}{2}\right). \end{array}$$

3. $f_{\mathbb{MI}}(X_1, X_2)$ *és* ***admissible*** *per* $\left(x_1^0, x_2^0\right) \in (IndX_1 \times IndX_2)$ *quan sigui fort o dèbil per aquell punt.*

4. $f_{\mathbb{MI}}(X_1, X_2)$ *és* ***racional -o centrat-*** *quan*
$$fR\left(Iv\left(X_1\right), Iv\left(X_2\right)\right) \subseteq f\left(c_1, c_2\right) * (1 \pm t)$$

Observacions.

1. Donat que l'interval $\left(1 \pm \frac{b^{-n}}{2}\right)$ és impropi, es verifica
$$f\left(x_1^0, x_2^0\right) * (1 \pm t) * \left(1 \pm \tfrac{b^{-n}}{2}\right) \subseteq f\left(x_1^0, x_2^0\right) * (1 \pm t)$$
i per tant, tot operador admissible per $\left(x_1^0, x_2^0\right) \in (IndX_1 \times IndX_2)$ complirà
$$fR\left(Iv\left(X_1\right), Iv\left(X_2\right)\right) \subseteq f\left(x_1^0, x_2^0\right) * (1 \pm t).$$

2. Tot operador racional -o centrat- és admissible

Exemple: Donades les marques $X_1, X_2 \in \mathbb{M}\left(10^{-2}, 8, 10\right)$ designades per $\langle 3, g_1\rangle$ i $\langle 1, g_2\rangle$ respectivament, l'operador $f_{\mathbb{MI}}(X_1, X_2)$ amb valor sobre $I^*(\mathbb{R})$ associat a la funció $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$ és fort per $x_1^0 = 3$ i $x_2^0 = 1$, ja que es té

---

[7]Suposem que $Iv(X_1)$ i $Iv(X_2)$ són independents i que $fR\left(Iv\left(X_1\right), Iv\left(X_2\right)\right)$ és un operador optimal; és a dir que
$$f^{\star}\left(Iv\left(X_1\right), Iv\left(X_2\right)\right) = fR\left(Iv\left(X_1\right), Iv\left(X_2\right)\right) = f^{\star\star}\left(Iv\left(X_1\right), Iv\left(X_2\right)\right).$$

- $Iv(X_1) = 3 * \left[1 + 10^{-2}, 1 - 10^{-2}\right] = [3.03, 2.97]$
  $Iv(X_2) = 1 * \left[1 + 10^{-2}, 1 - 10^{-2}\right] = [1.01, 0.99]$.

- $$\begin{aligned} fR(Iv(X_1), Iv(X_2)) = & \ [3.03, 2.97]^2 + [1.01, 0.99]^2 = \\ = & \ \left[1.0201 * 10^1, 9.801 * 10^0\right]. \end{aligned}$$

- Si $\left(x_1^0, x_2^0\right) = (3, 1)$,
  $$\begin{aligned} & f\left(x_1^0, x_2^0\right) * (1 \pm t) * \left(1 \pm \frac{b^{-n}}{2}\right) = \left(3^2 + 1^2\right) * \left(1 \pm 10^{-2}\right) * \left(1 \pm \frac{10^{-8}}{2}\right) = \\ & \quad = \left[1.01 * 10^1, 9.9 * 10^0\right] * \left(1 \pm \frac{10^{-8}}{2}\right) = \\ & \quad = \left[1.010000005 * 10^1, 9.899999951 * 10^0\right]. \end{aligned}$$

Es compleix $fR(Iv(X_1), Iv(X_2)) \subseteq f\left(x_1^0, x_2^0\right) * (1 \pm t) * \left(1 \pm \frac{b^{-n}}{2}\right)$; es tracta, doncs, d'un operador fort i per tant, admissible.

Exemple: Per les marques X_1 i $X_2 \in \mathbb{M}\left(10^{-1}, 8, 10\right)$ designades per $\langle 3, g_1 \rangle$ i $\langle 1, g_2 \rangle$ respectivament, l'operador de marques $f_{\mathbb{MI}}(X_1, X_2)$ amb valor sobre $I^*(\mathbb{R})$ associat a la funció $f(x_1, x_2) = \sqrt{x_1 + x_2}$ no és racional, ja que

- $Iv(X_1) = 3 * \left[1 + 10^{-1}, 1 - 10^{-1}\right] = [3.3, 2.7]$
  $Iv(X_2) = 1 * \left[1 + 10^{-1}, 1 - 10^{-1}\right] = [1.1, 0.9]$.

- $$\begin{aligned} fR(Iv(X_1), Iv(X_2)) = & \ \sqrt{[3.3, 2.7] + [1.1, 0.9]} = \sqrt{[4.4, 3.6]} = \\ = & \ [2.097617\ldots, 1.8973666\ldots]. \end{aligned}$$

- $$\begin{aligned} f(c_1, c_2) * (1 \pm t) = & \ \sqrt{(3 + 1)} * \left(1 \pm 10^{-1}\right) = [2.2, 1.8] \\ = & \ [2.2, 1.8] * \left(1 \pm \frac{10^{-8}}{2}\right) = \\ = & \ [2.200000011, 1.799999991]. \end{aligned}$$

Es compleix $fR(Iv(X_1), Iv(X_2)) \supset f(c_1, c_2) * (1 \pm t)$ i no es tracta, doncs, d'un operador racional, ja que de ser-ho tindríem

$$fR(Iv(X_1), Iv(X_2)) \subseteq f(c_1, c_2) * (1 \pm t) \subset fR(Iv(X_1), Iv(X_2))$$

2.4.2 Operadors de marques

Definició 2.35 ***(Operador de marques sobre*** $\mathbb{M}(t, n, b)$***)***

*Si $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ és contínua, definirem l'****operador de marques sobre*** $\mathbb{M}(t, n, b)$ *associat a f que representarem per $f_{\mathbb{M}(t,n)}$, com la funció*

$$f_{\mathbb{M}(t,n)} : \mathbb{M}(t, n, b) \times \mathbb{M}(t, n, b) \longrightarrow \mathbb{M}(t, n, b),$$

tal que si $X_1, X_2 \in \mathbb{M}(t,n,b)$ *estan designades respectivament per* $\langle c_1, t, g_1, n, b\rangle$ *i per* $\langle c_2, t, g_2, n, b\rangle$*, aleshores*

$$f_{\mathbb{M}(t,n)}(X_1, X_2) := \langle dif(c_1, c_2), t, g_z, n, b\rangle$$

essent

1. $dif(c_1, c_2)$ *el càlcul digital de la funció* f *en* (c_1, c_2) *sobre l'escala* DI_n*.*

2. *La granularitat resultant,* g_z*, l'expressarem com*

   (a) $g_z = \gamma_{1,2}$*, si al càlcul digital* $dif(c_1, c_2)$ *no hi ha desplaçament relatiu respecte del valor exacte* $f(c_1, c_2)$*.*

   (b) $g_z = \gamma_{1,2} + b^{-n}$*, si admetem que hi ha desplaçament relatiu al càlcul* $dif(c_1, c_2)$ *respecte del valor exacte* $f(c_1, c_2)$ *i aquest desplaçament és mínim; és a dir, menor o igual que el valor de la granularitat digital* b^{-n}*. Cas que fos més gran, aquest terme* b^{-n} *hauria de substituir-se per una fita del desplaçament digital comès.*

Al valor $\gamma_{1,2}$ *de la granularitat resultant* g_z *l'anomenarem* ***terme principal de la granularitat imatge.*** *Exigirem sempre que* $\gamma_{1,2} \geq g_{1,2}^M$ *i, per determinar-lo podem basar-nos en diferents criteris. Mencionarem aquí*

- *Criteri* ***minimalista****, en què es demana també que* $\gamma_{1,2}$ *sigui el menor nombre que verifica*

$$\begin{array}{l} f(c_1, c_2) * (1 \pm \gamma_{1,2}) \subseteq fR(c_1 * (1 \pm g_1), c_2) \\ i \\ f(c_1, c_2) * (1 \pm \gamma_{1,2}) \subseteq fR(c_1, c_2 * (1 \pm g_2)), \end{array}$$

  amb el qual basarem el posterior estudi de les operacions.

- *Criteri* ***maximalista****, en què exigiriem també que* $\gamma_{1,2}$ *sigui el menor nombre que verifica*

$$f(c_1, c_2) * (1 \pm \gamma_{1,2}) \subseteq fR(c_1 * (1 \pm g_1), c_2 * (1 \pm g_2)).$$

Observacions.

1. Si $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ és contínua, la relació existent entre l'operador $f_{\mathbb{MI}}$ (definició 2.34) i els operador de marques sobre $\mathbb{M}(t, n, b)$ és

$$f_{\mathbb{MI}} = Iv \circ f_{\mathbb{M}(t,\infty)}$$

2. La determinació de la granularitat resultant g_z es farà individualment per a cada operador, de manera que l'evolució de la granularitat reflecteixi pas a pas la granularitat heretada de les etapes anteriors del càlcul i les pèrdues de definició dels resultats successius. El que mai podrem admetre és que un resultat tingui una validesa superior a la de les dades. Això es tradueix en la regla general $g_z \geq g_{1,2}^M$, tenint en compte que t és un paràmetre del tipus[8].

   Així doncs, el valor de la granularitat resultant g_z, es calcularà a partir de la suma del terme principal $\gamma_{1,2}$, que dependrà de l'operador i dels operands, més un terme secundari comú a totes les operacions que puguin comportar un desplaçament del centre calculat respecte del centre exacte i que ens protegeix de possibles pertorbacions semàntiques que podrien derivar-se d'aquests desplaçaments. A partir de l'expressió

$$(1 + g) = (1 + \gamma_{1,2}) \left(1 + \tfrac{b^{-n}}{2}\right),$$

   tenim que

$$g = \gamma_{1,2} + \tfrac{b^{-n}}{2} + \gamma_{1,2} \cdot \tfrac{b^{-n}}{2} \leq \gamma_{1,2} + b^{-n}.$$

   Aquesta desigualtat ens autoritza, doncs, a prendre el terme secundari de la granularitat (pel desplaçament digital del càlcul), com b^{-n}.

   Podríem proposar que el terme b^{-n} de la granularitat resultant fos substituït per una expressió $\varphi(t)$. Amb això, el tipus de la marca podria quedar exclusivament determinat per t, deixant la determinació de b a la conveniència de l'aritmètica de suport, i la determinació d'n al compliment pel tipus $\mathbb{M}(t)$ de la condició $b^{-n} \leq \varphi(t)$.

3. La definició d'operador de marques amb valor sobre $\mathbb{M}(t, n, b)$ que acabem de donar presuposa que els operadors són calculables amb l'error digital relatiu mínim associat a l'escala digital de suport.

[8]És important recordar que la granularitat és un element de control de qualitat d'un valor en una escala, però és essencialment un element borrós. Per aquest motiu, per a cada operador podem definir diversos càlculs de la granularitat resultant, sempre que es respecti aquesta regla.

4. Per posteriors necessitats semàntiques és imprescindible que es verifiqui $t > g_z$, per garantir que l'interval $Exsh\,(Z)$ (definició 2.7) essent $Z = f_{\mathbb{M}(t,n)}\,(X_1, X_2)$ tingui sentit semàntic com interval impropi.

Definició 2.36 ***(Operadors de marques forts i dèbils)***
Donats $f_{\mathbb{M}(t,n)} : \mathbb{M}\,(t,n,b) \times \mathbb{M}\,(t,n,b) \longrightarrow \mathbb{M}\,(t,n,b)$ *i* $X_1, X_2 \in \mathbb{M}\,(t,n,b)$, *direm*

- $f_{\mathbb{M}(t,n)}\,(X_1, X_2)$ *és* ***fort****, quan sigui fort* $f_{\mathbb{MI}}\,(X_1, X_2)$ *per* (c_1, c_2).
- $f_{\mathbb{M}(t,n)}\,(X_1, X_2)$ *és* ***dèbil****, quan sigui dèbil* $f_{\mathbb{MI}}\,(X_1, X_2)$ *per* (c_1, c_2).

El fet d'exigir en la definició d'operador de marques sobre $\mathbb{M}\,(t,n,b)$ que $f_{\mathbb{MI}}$ sigui racional fa innecessari el concepte d'operador de marques sobre $\mathbb{M}\,(t,n,b)$ admissible.

Proposició 2.37 *Si* $f_{\mathbb{M}(t,n)}$ *és un operador de marques* ***dèbil****, aleshores es compleix que*

$$\left(1 \pm \tfrac{b^{-n}}{2}\right) * fR\,(Iv\,(X_1)\,, Iv\,(X_2)) \subseteq dif\,(c_1, c_2) * (1 \pm t)\,.$$

Demostració. El fet de considerar que els operadors són calculables amb l'error digital relatiu mínim, ens porta que

$$dif\,(c_1, c_2) \in \left(f\,(c_1, c_2) * \left(1 \pm \tfrac{b^{-n}}{2}\right)\right)' \tag{2.2}$$

i com que l'interval

$$f\,(c_1, c_2) * \left(1 \pm \tfrac{b^{-n}}{2}\right)$$

és impropi, la relació de pertinença donada en l'anterior expressió 2.2 podem expressar-la com inclusió intervalar de la forma

$$f\,(c_1, c_2) * \left(1 \pm \tfrac{b^{-n}}{2}\right) \subseteq dif\,(c_1, c_2)\,.$$

A la vegada, i donat que $(1 \pm t)$ correspon a un interval impropi, es verifica

$$f\,(c_1, c_2) * \left(1 \pm \tfrac{b^{-n}}{2}\right) * (1 \pm t) \subseteq dif\,(c_1, c_2) * (1 \pm t)\,, \tag{2.3}$$

però si $f_{\mathbb{M}(t,n)}$ és dèbil, es compleix

$$fR\,(Iv\,(X_1)\,, Iv\,(X_2)) \subseteq f\,(c_1, c_2) * (1 \pm t)$$

i per tant,

$$fR\left(Iv\left(X_1\right), Iv\left(X_2\right)\right) * \left(1 \pm \tfrac{b^{-n}}{2}\right) \subseteq f\left(c_1, c_2\right) * (1 \pm t) * \left(1 \pm \tfrac{b^{-n}}{2}\right). \quad (2.4)$$

D'aquesta forma, per transitivitat de la inclusió intervalar, les inclusions donades en 2.3 i 2.4 ens porten que

$$fR\left(Iv\left(X_1\right), Iv\left(X_2\right)\right) * \left(1 \pm \tfrac{b^{-n}}{2}\right) \subseteq dif\left(c_1, c_2\right) * (1 \pm t).$$

Proposició 2.38 *Si $f_{\mathbb{M}(t,n)}$ és un operador de marques* ***fort****, aleshores el valor $dif\left(c_1, c_2\right) * (1 \pm t)$ és una fita intervalar de $fR\left(Iv\left(X_1\right), Iv\left(X_2\right)\right)$; és a dir*

$$fR\left(Iv\left(X_1\right), Iv\left(X_2\right)\right) \subseteq dif\left(c_1, c_2\right) * (1 \pm t).$$

Demostració. Com hem vist en l'anterior proposició 2.37, es compleix

$$f\left(c_1, c_2\right) * \left(1 \pm \tfrac{b^{-n}}{2}\right) \subseteq dif\left(c_1, c_2\right). \quad (2.5)$$

Per tractar-se d'un operador fort per (c_1, c_2), es té la inclusió

$$fR\left(Iv\left(X_1\right), Iv\left(X_2\right)\right) \subseteq f\left(c_1, c_2\right) * \left(1 \pm \tfrac{b^{-n}}{2}\right) * (1 \pm t). \quad (2.6)$$

De les inclusions 2.5 i 2.6 es té

$$fR\left(Iv\left(X_1\right), Iv\left(X_2\right)\right) \subseteq dif\left(c_1, c_2\right) * (1 \pm t).$$

2.4.3 Operadors aritmètics

Ens proposem estudiar a continuació els operadors de marques associats als operadors aritmètics reals suma, producte, quocient, màxim i mínim. Veurem que es tracta d'operadors racionals -centrats- i calcularem el terme principal de l'increment de granularitat per a cada un d'ells.

L'operador producte.

Proposició 2.39 ***(Tolerància i centre del producte)***
Siguin $X_1 = \langle c_1, t, g_1, n, b\rangle$ i $X_2 = \langle c_2, t, g_2, n, b\rangle$ dues marques normalitzades. Prenent

$$Z = \left(c_1 c_2\right) * (1 \pm t) * \left(1 \pm \tfrac{b^{-n}}{2}\right) \in I^*(\mathbb{R}),$$

es compleix

$$Iv\left(X_1\right) * Iv\left(X_2\right) \subseteq Z;$$

és a dir, Z és un operador $\mathbb{MI}$ racional -i fort per (c_1, c_2)-.

Demostració. Una demostració purament intervalar s'obté a partir de la igualtat

$$(c_1 * (1 \pm t)) * (c_2 * (1 \pm t)) = (c_1 c_2) * (1 \pm t) * (1 \pm t) . \qquad (2.7)$$

Utilitzant el fet $t > \frac{b^{-n}}{2}$, es té

$$(1 \pm t) \subseteq \left(1 \pm \frac{b^{-n}}{2}\right),$$

d'on es dedueix que l'expressió donada en 2.7 estarà inclosa en

$$(c_1 c_2) * \left(1 \pm \frac{b^{-n}}{2}\right) * (1 \pm t) .$$

Observació. D'aquesta mateixa proposició és possible fer-ne una segona demostració a nivell puntual, utilitzant els extrems dels intervals associats $Iv\,(X_1)\,,\, Iv\,(X_2)$ i Z. Aquesta demostració és:

Els intervals $Iv\,(X_1)$ i $Iv\,(X_2)$ no contenen l'element zero en el seu interior, perquè el zero no pot pertànyer a l'interior de cap marca[9]. D'aquesta forma ens caldrà fer distinció dels següents casos (en tots ells es fa ús de la norma $t > \frac{b^{-n}}{2}$) en els quals s'utilitza la taula del producte d'intervals (Vegeu [37, Sec 3.4, pàg 84])

- $c_1 \geq 0, c_2 \geq 0$. En aquesta situació (apliquem el cas 1 de l'esmentada taula [37]), es té

  $$\begin{aligned} Iv\,(X_1) * Iv\,(X_2) = &\ [c_1\,(1+t)\,, c_1\,(1-t)] * [c_2\,(1+t)\,, c_2\,(1-t)] = \\ = &\ \left[c_1 c_2\,(1+t)^2\,, c_1 c_2\,(1-t)^2\right]. \end{aligned}$$

  Ja que $t \geq \frac{b^{-n}}{2}$ s'obté

  $1 + t \geq 1 + \frac{b^{-n}}{2} \Rightarrow (c_1 c_2)\,(1+t) \geq (c_1 c_2)\left(1 + \frac{b^{-n}}{2}\right)$ i

  $1 - t \leq 1 - \frac{b^{-n}}{2} \Rightarrow (c_1 c_2)\,(1-t) \leq (c_1 c_2)\left(1 - \frac{b^{-n}}{2}\right)$,

  d'on resulta

  $$\begin{aligned} &\left[(c_1 c_2)\,(1+t)^2\,, (c_1 c_2)\,(1-t)^2\right] \subseteq \\ &\qquad \subseteq \left[(c_1 c_2)\,(1+t)\left(1 + \frac{b^{-n}}{2}\right), (c_1 c_2)\,(1-t)\left(1 - \frac{b^{-n}}{2}\right)\right] = Z. \end{aligned}$$

[9] Fins i tot el zero no pertany a l'interior de la marca de centre zero, la que es consideraria "marca zero."

- $c_1 \geq 0, c_2 < 0$ (ó $c_1 < 0, c_2 \geq 0$ per commutativitat), aplicant el cas 4 (respectivament cas 13) de la taula del producte intervalar [37], tenim

$$\begin{aligned} Iv\left(X_1\right) * Iv\left(X_2\right) = \;& \left[c_1\left(1+t\right), c_1\left(1-t\right)\right] * \left[c_2\left(1-t\right), c_2\left(1+t\right)\right] = \\ = \;& \left[\left(c_1 c_2\right)\left(1-t\right)^2, c_1 c_2\left(1+t\right)^2\right]. \end{aligned}$$

També com abans, a partir del fet conegut $t \geq \frac{b^{-n}}{2}$ i que $c_1 c_2 \leq 0$, es té

$$\left(c_1 c_2\right)\left(1-t\right)^2 \geq \left(c_1 c_2\right)\left(1-\tfrac{b^{-n}}{2}\right)\left(1-t\right) \text{ i}$$

$$\left(c_1 c_2\right)\left(1+t\right)^2 \leq \left(c_1 c_2\right)\left(1+\tfrac{b^{-n}}{2}\right)\left(1+t\right),$$

d'on resulta

$$\left[\left(c_1 c_2\right)\left(1-t\right)^2, \left(c_1 c_2\right)\left(1+t\right)^2\right] \subseteq$$

$$\left[\left(c_1 c_2\right)\left(1-t\right)\left(1-\tfrac{b^{-n}}{2}\right), \left(c_1 c_2\right)\left(1+t\right)\left(1+\tfrac{b^{-n}}{2}\right)\right].$$

- $c_1 < 0, c_2 < 0$, al ser $c_1 c_2 \geq 0$, un raonament anàleg a l'efectuat en la primera situació, aplicant el cas 16 de la taula del producte [37]), podem afirmar

$$\begin{aligned} IvX_1 * IvX_2 = \;& \left[c_1\left(1-t\right), c_1\left(1+t\right)\right] * \left[c_2\left(1-t\right), c_2\left(1+t\right)\right] = \\ = \;& \left[\left(c_1 c_2\right)\left(1+t\right)^2, \left(c_1 c_2\right)\left(1-t\right)^2\right] \subseteq \\ \subseteq \;& \left[c_1 c_2\left(1+t\right)\left(1+\tfrac{b^{-n}}{2}\right), c_1 c_2\left(1-t\right)\left(1-\tfrac{b^{-n}}{2}\right)\right] = Z. \end{aligned}$$

Proposició 2.40 ***(Terme principal de la granularitat del producte)*** *Donades les marques normalitzades $X_1, X_2 \in \mathbb{M}(t, n, b)$, designant X_1 per $\langle c_1, g_1\rangle$ i X_2 per $\langle c_2, g_2\rangle$, si $\gamma_{1,2}$ és el menor valor entre $g_{1,2}^M$ i 1 tal que*

$$\begin{aligned} &\left(c_1 c_2\right) * \left(1 \pm \gamma_{1,2}\right) \subseteq \left(c_1 * \left(1 \pm g_1\right)\right) * c_2 \\ &i \\ &\left(c_1 c_2\right) * \left(1 \pm \gamma_{1,2}\right) \subseteq c_1 * \left(c_2 * \left(1 \pm g_2\right)\right), \end{aligned}$$

es compleix per al producte que

$$\gamma_{1,2} = g_{1,2}^M.$$

Demostració. Trivialment, doncs, per commutativitat del producte

$$\begin{aligned}(c_1 * (1 \pm g_1)) * c_2 &= (c_1 c_2) * (1 \pm g_1) \text{ i}\\ c_1 * (c_2 * (1 \pm g_2)) &= (c_1 c_2) * (1 \pm g_2)\,.\end{aligned}$$

Per tant,

$$\gamma_{1,2} = g_{1,2}^M.$$

Observació. En una escala no contínua (granulada), els productes dels valors marcats són de la forma

$$c_1 c_2 (1 \pm k_1 g_1)(1 \pm k_2 g_2)\,,\ k_1, k_2 \in \{0, 1, \ldots\}\,.$$

Quan escollim com a granularitat del producte la més gran de les granularitats dels factors, estem implícitament adoptant com a granularitat la projecció sobre el resultat de la granularitat del factor que té la granularitat més gran.

Teorema 2.41 ***(Algorisme de càlcul de l'operador producte)***
Donades les marques normalitzades $X_1, X_2 \in \mathbb{M}(t, n, b)$, designant X_1 per $\langle c_1, g_1 \rangle$ i X_2 per $\langle c_2, g_2 \rangle$, el seu ***producte*** *el representem per $X_1 * X_2$ i el seu valor és el d'una marca $Z = \langle c_z, t, g_z, n, b \rangle$ en la qual*

- *El centre és el producte digital dels centres, d'acord amb l'aritmètica de l'escala $c_z = di\,(c_1 c_2)$*
- *La tolerància relativa, la base b i el nombre de xifres n són els mateixos que imposa el tipus de les dades.*
- *La granularitat relativa és $g_z = g_{1,2}^M + b^{-n}$*

Per tant,

$$X_1 * X_2 = \left\langle di\,(c_1 c_2)\,,\, t,\, g_{1,2}^M + b^{-n},\, n, b \right\rangle.$$

Demostració. A partir de les proposicions anteriors

Observació. Podria semblar que amb un criteri estricte, que associaria la granularitat a un error numèric del centre de la marca, la granularitat del producte hauria de valer de l'ordre de

$$g_1 + g_2 + g_1 g_2 + \tfrac{b^{-n}}{2}.$$

Cal tenir en compte, però, que la granularitat només té valor a través de l'índex d'imprecisió corresponent $\left(\frac{g}{t}\right)$. Si en efectuar un càlcul prenem només els termes de primer ordre, el procés que ens proporciona la marca resultat d'un producte, ens donaria, en la primera etapa un resultat intervalar d'amplitud $t' = t_1 + t_2 = 2t$; en la segona etapa d'aquest càlcul, l'amplitud $2t$ és restringida al valor t del tipus. Suposem que els índex d'imprecisió dels factors siguin $\frac{g_1}{t}$ i $\frac{g_2}{t}$ amb la hipòtesi $\frac{g_1}{t} \leq \frac{g_2}{t}$. La desviació de primer ordre que acompanyaria el resultat intervalar intermig valdria $g' = g_1 + g_2$ i el seu índex d'imprecisió fóra $\frac{g_1+g_2}{2t}$ que, desplaçat al resultat final de la marca amb tolerància típica "t" seria $\frac{(g_1+g_2)/2}{t}$, que és menor o igual que $\frac{g_2}{t}$.

Podem concloure, doncs, que prendre com a granularitat del producte la del factor que la té màxima significa atribuir al resultat una imprecisió més aviat superior a la que s'obtindria si en féssim el càlcul.

Propietats del producte de marques

Si $X_i = \langle c_i, t, g_i, n, b\rangle$ i les marques resultants de les operacions que efectuarem són vàlides, es verifica

- Si $\alpha \in \left]\frac{g_{1,2}^M + b^{-n}}{t}, 1\right]$, $X_1 * X_2 \approx_\alpha X_2 * X_1$.

  Demostració. Es compleix

$$di\,(c_1 \cdot c_2) \in \left((c_1 \cdot c_2) * \left(1 \pm \tfrac{b^{-n}}{2}\right)\right)'$$
$$di\,(c_2 \cdot c_1) \in \left((c_2 \cdot c_1) * \left(1 \pm \tfrac{b^{-n}}{2}\right)\right)'$$

  la situació més desfavorable es donaria si $di\,(c_1 \cdot c_2)$ i $di\,(c_2 \cdot c_1)$ fossin els extrems de l'interval $(c_1 \cdot c_2) * \left(1 \pm \frac{b^{-n}}{2}\right)$. Suposem $c_1 \cdot c_2 > 0$, $di\,(c_1 \cdot c_2) = c_1c_2\left(1 + \frac{b^{-n}}{2}\right)$ i $di\,(c_2 \cdot c_1) = c_1c_2\left(1 - \frac{b^{-n}}{2}\right)$ d'on resultaria

$$\begin{aligned} di\,(c_1c_2)\,(1 - b^{-n}) = &\ c_1c_2\left(1 + \tfrac{b^{-n}}{2}\right)(1 - b^{-n}) = \\ = &\ c_1c_2\left(1 - b^{-n} + \tfrac{b^{-n}}{2} - \tfrac{b^{-2n}}{2}\right) < \\ < &\ c_1c_2\left(1 - \tfrac{b^{-n}}{2}\right) = di\,(c_2 \cdot c_1) \end{aligned}$$

  per tant,

$$di\,(c_1c_2)\left(1 - b^{-n}\right) < di\,(c_2c_1) < di\,(c_1c_2) < di\,(c_1c_2)\left(1 + b^{-n}\right).$$

En el cas extrem en què $\alpha = \frac{g^M_{1,2}+b^{-n}}{t}$, tindrem marques vàlides respecte d'αt i es complirà

$$di\left(c_2c_1\right) \in Ind\left\langle di\left(c_1c_2\right), \alpha t, g_z, n, b\right\rangle$$

- Si $\alpha \in \left]\frac{g^M_{1,2,3}+2b^{-n}}{t}, 1\right]$, $(X_1 * X_2) * X_3 \approx_\alpha X_1 * (X_2 * X_3)$.

  Demostració. La situació més desfavorable es presenta quan els valors $di\left(c_1 \cdot di\left(c_2 \cdot c_3\right)\right)$ i $di\left(di\left(c_1 \cdot c_2\right) \cdot c_3\right)$ són els extrems de l'interval $\left((c_1c_2) * \left(1 \pm \frac{b^{-n}}{2}\right)\right) * \left(c_3 * \left(1 \pm \frac{b^{-n}}{2}\right)\right)$.
  Si suposem $(c_1 \cdot c_2) \cdot c_3 > 0$, aleshores podem agafar

$$di\left(c_1 \cdot di\left(c_2 \cdot c_3\right)\right) = \left(c_1 \cdot c_2 \cdot c_3\right) \cdot \left(1 + \frac{b^{-n}}{2}\right) \cdot \left(1 + \frac{b^{-n}}{2}\right)$$

  i

$$di\left(di\left(c_1 \cdot c_2\right) \cdot c_3\right) = \left(c_1 \cdot c_2 \cdot c_3\right) \cdot \left(1 - \frac{b^{-n}}{2}\right) \cdot \left(1 - \frac{b^{-n}}{2}\right)$$

  amb què s'arriba que

$$\begin{aligned} di\left(c_1 \cdot di\left(c_2 \cdot c_3\right)\right) &= \left(c_1 \cdot c_2 \cdot c_3\right) \cdot \left(1 + b^{-n} + \frac{b^{-2n}}{4}\right) \\ di\left(di\left(c_1 \cdot c_2\right) \cdot c_3\right) &= \left(c_1 \cdot c_2 \cdot c_3\right) \cdot \left(1 - b^{-n} + \frac{b^{-2n}}{4}\right), \end{aligned}$$

  per tant,

$$\begin{aligned} di\left(c_1 \cdot di\left(c_2 \cdot c_3\right)\right)\left(1 - 2b^{-n}\right) = {} & \left(c_1c_2\, c_3\right) \cdot \left(1 + \frac{b^{-n}}{2}\right)^2 \left(1 - 2b^{-n}\right) < \\ < {} & \left(c_1c_2\, c_3\right) \cdot \left(1 - \frac{b^{-n}}{2}\right)^2 = \\ = {} & di\left(di\left(c_1 \cdot c_2\right) \cdot c_3\right) < \\ < {} & di\left(c_1 \cdot di\left(c_2 \cdot c_3\right)\right). \end{aligned}$$

  en el cas més extrem en què $\alpha = \frac{g^M_{1,2,3}+2b^{-n}}{t}$ podem afirmar que

$$di\left(di\left(c_1 \cdot c_2\right) \cdot c_3\right) \in di\left(c_1 \cdot di\left(c_2 \cdot c_3\right)\right) * \left(1 \pm \alpha t\right).$$

- Donada la marca $X = \langle c, t, g, n, b\rangle$, per a cada marca de la forma $\langle 1, \eta\rangle \in \mathbb{M}\left(t, n, b\right)$, si $\alpha \in \left]\frac{\max\{g,\eta\}+b^{-n}}{t}, 1\right]$, es verifica

$$X * \langle 1,\ t, \eta, n, b\rangle \approx_\alpha X,$$

  ja que $X * \langle 1,\ t, \eta, n, b\rangle = \left\langle di\left(1 \cdot c\right),\ t, \max\left\{g, \eta\right\} + b^{-n}, n, b\right\rangle$

- Donada una marca $X = \langle c, g\rangle \in \mathbb{M}(t, n, b)$ amb $c \neq 0$, la marca

$$DI_n\left(\left\langle \frac{1}{c}, g\right\rangle\right) = \left\langle di\left(\frac{1}{c}\right), g + b^{-n}\right\rangle \in \mathbb{M}(t, n, b)$$

és a dir, a la immersió vista en la definició 2.13 de la marca $\left\langle \frac{1}{c}, g\right\rangle \in \mathbb{M}(t, \infty, b)$ en l'escala DI_n, compleix

$$\langle c, g\rangle * DI_n\left(\left\langle \frac{1}{c}, g\right\rangle\right) \approx_\alpha \langle 1, g\rangle .$$

per $\alpha \in \left]\frac{g+\frac{5}{4}b^{-n}}{t}, 1\right]$.

Demostració. Per hipòtesi,

$$di\left(c \cdot di\left(\tfrac{1}{c}\right)\right) \in \left(\left(c \cdot di\left(\tfrac{1}{c}\right)\right) * \left(1 \pm \tfrac{b^{-n}}{2}\right)\right)'$$
i
$$di\left(\tfrac{1}{c}\right) \in \left(\tfrac{1}{c} * \left(1 \pm \tfrac{b^{-n}}{2}\right)\right)'$$

intervalarment, doncs,

$$\left(c \cdot di\left(\tfrac{1}{c}\right)\right) * \left(1 \pm \tfrac{b^{-n}}{2}\right) \subseteq di\left(c \cdot di\left(\tfrac{1}{c}\right)\right)$$
i
$$\tfrac{1}{c} * \left(1 \pm \tfrac{b^{-n}}{2}\right) \subseteq di\left(\tfrac{1}{c}\right)$$

i així

$$\begin{aligned} c \cdot \tfrac{1}{c} * \left(1 \pm \tfrac{b^{-n}}{2}\right) * \left(1 \pm \tfrac{b^{-n}}{2}\right) &\subseteq c \cdot di\left(\tfrac{1}{c}\right) * \left(1 \pm \tfrac{b^{-n}}{2}\right) \subseteq \\ &\subseteq di\left(c \cdot di\left(\tfrac{1}{c}\right)\right) \end{aligned}$$

que conjuntísticament equival a

$$di\left(c \cdot di\left(\frac{1}{c}\right)\right) \in \left(\left(1 \pm \tfrac{b^{-n}}{2}\right) * \left(1 \pm \tfrac{b^{-n}}{2}\right)\right)' \tag{2.8}$$

i com que

$$\begin{aligned} \left(1 \pm \tfrac{b^{-n}}{2}\right) * \left(1 \pm \tfrac{b^{-n}}{2}\right) &= \left[1 + \tfrac{b^{-n}}{2}, 1 - \tfrac{b^{-n}}{2}\right] * \left[1 + \tfrac{b^{-n}}{2}, 1 - \tfrac{b^{-n}}{2}\right] = \\ &= \left[1 + b^{-n} + \tfrac{b^{-2n}}{4}, 1 - b^{-n} + \tfrac{b^{-2n}}{4}\right] \end{aligned}$$

i $\frac{b^{-2n}}{4} \leq \frac{b^{-n}}{4}$, resulta

$$1 * \left(1 \pm \frac{5b^{-n}}{4t} t\right) = \left[1 + \frac{5}{4} b^{-n}, 1 - \frac{5}{4} b^{-n}\right] \subseteq \left(1 \pm \tfrac{b^{-n}}{2}\right) * \left(1 \pm \tfrac{b^{-n}}{2}\right).$$

i utilitzant la relació vista en 2.8 s'obté pel cas més extrem $\alpha = \frac{g + \frac{5}{4} b^{-n}}{t}$

$$di\left(c \cdot di\left(\frac{1}{c}\right)\right) \in \left(\left(1 \pm \tfrac{b^{-n}}{2}\right) * \left(1 \pm \tfrac{b^{-n}}{2}\right)\right)' \subseteq \left(1 * \left(1 \pm \left(g + \frac{5}{4} b^{-n}\right)\right)\right)'$$

El conjunt $(\mathbb{M}(t, n, b), *)$ té estructura de grup commutatiu, encara que les propietats estudiades vagin referides a la igualtat dèbil.

Definició 2.42 ***(Marca inversa)***
Si $X = \langle c, g \rangle \in \mathbb{M}(t, n, b)$ amb $c \neq 0$, la marca

$$DI_n\left(\left\langle \frac{1}{c}, g \right\rangle\right) = \left\langle di\left(\frac{1}{c}\right), g + \tfrac{b^{-n}}{2} \right\rangle \in \mathbb{M}(t, n, b)$$

*l'anomenem **marca inversa** de X i la representem per X^{-1}.*

L'operador quocient.

Proposició 2.43 ***(Tolerància i centre del quocient)***
Si $X_1 = \langle c_1, t, g_1, n, b \rangle$ i $X_2 = \langle c_2, t, g_2, n, b \rangle$ són dues marques normalitzades tals que $0 \notin IndX_2$, sota la hipòtesi $t > b^{-n}$ es compleix

$$\frac{Iv(X_1)}{Iv(X_2)} \subseteq \frac{c_1}{c_2} * (1 \pm t) * \left(1 \pm \tfrac{b^{-n}}{2}\right).$$

Demostració. Anomenem $Z = \left(\frac{c_1}{c_2}\right) * (1 \pm t) * \left(1 \pm \frac{b^{-n}}{2}\right)$.

Tal com hem dit en estudiar la tolerància del producte (Veure proposició 2.39), els intervals $Iv(X_1)$ i $Iv(X_2)$ no contenen l'element zero en el seu interior. D'aquesta forma podem fer la distinció dels casos següents

- $c_1 \geq 0,\ c_2 > 0$ situació en què tindrem

$$\frac{Iv(X_1)}{Iv(X_2)} = \frac{[c_1(1+t), c_1(1-t)]}{[c_2(1+t), c_2(1-t)]} = \left[\frac{c_1}{c_2} \frac{1+t}{1-t}, \frac{c_1}{c_2} \frac{1-t}{1+t}\right]$$

i

$$Z = \left[\frac{c_1}{c_2}(1+t)\left(1 + \tfrac{b^{-n}}{2}\right), \frac{c_1}{c_2}(1-t)\left(1 - \tfrac{b^{-n}}{2}\right)\right].$$

Observem que

$$\frac{c_1}{c_2}\frac{1+t}{1-t}=\frac{c_1}{c_2}(1+t)\left(1+t+t^2+\cdots\right)\geq\frac{c_1}{c_2}(1+t)\left(1+\tfrac{b^{-n}}{2}\right)$$

i que

$$\frac{c_1}{c_2}\frac{1-t}{1+t}\leq\frac{c_1}{c_2}(1-t)\left(1-\tfrac{b^{-n}}{2}\right),$$

ja que

$$\begin{aligned}\frac{1}{1+t}\leq 1-\tfrac{b^{-n}}{2}\Leftrightarrow\quad & 1\leq(1+t)\left(1-\tfrac{b^{-n}}{2}\right)=1+t-\tfrac{b^{-n}}{2}-\tfrac{tb^{-n}}{2}\\ & \Leftrightarrow t\geq\tfrac{b^{-n}}{2}+\tfrac{tb^{-n}}{2},\end{aligned}$$

desigualtat que és certa sota la hipòtesi $t\geq b^{-n}$.

- $c_1<0,\ c_2<0$ situació en què tindrem

$$\frac{Iv(X_1)}{Iv(X_2)}=\frac{[c_1(1-t),c_1(1+t)]}{[c_2(1-t),c_2(1+t)]}=\left[\frac{c_1}{c_2}\frac{1+t}{1-t},\frac{c_1}{c_2}\frac{1-t}{1+t}\right]$$

i

$$Z=\left[\frac{c_1}{c_2}(1+t)\left(1+\tfrac{b^{-n}}{2}\right),\frac{c_1}{c_2}(1-t)\left(1-\tfrac{b^{-n}}{2}\right)\right],$$

situació anàloga a l'anterior.

- $c_1\geq 0,\ c_2<0$ ens trobem amb

$$\frac{Iv(X_1)}{Iv(X_2)}=\frac{[c_1(1+t),c_1(1-t)]}{[c_2(1-t),c_2(1+t)]}=\left[\frac{c_1}{c_2}\frac{1-t}{1+t},\frac{c_1}{c_2}\frac{1+t}{1-t}\right]$$

i

$$Z=\left[\frac{c_1}{c_2}(1-t)\left(1-\tfrac{b^{-n}}{2}\right),\frac{c_1}{c_2}(1+t)\left(1+\tfrac{b^{-n}}{2}\right)\right],$$

complint-se

$$\frac{c_1}{c_2}\frac{1-t}{1+t}\geq\frac{c_1}{c_2}(1-t)\left(1-\tfrac{b^{-n}}{2}\right),$$

donat que, com s'ha vist en el cas anterior, $\dfrac{1}{1+t}\leq 1-\frac{b^{-n}}{2}$ (recordem que $\frac{c_1}{c_2}\leq 0$).

i complint-se també

$$\frac{c_1}{c_2}\frac{1+t}{1-t}=\frac{c_1}{c_2}(1+t)\left(1+t+t^2\cdots\right)\leq\frac{c_1}{c_2}(1+t)\left(1+\tfrac{b^{-n}}{2}\right)$$

- $c_1 < 0,\ c_2 > 0$ tindrem

$$\frac{Iv\,(X_1)}{Iv\,(X_2)} = \frac{[c_1\,(1-t)\,,c_1\,(1+t)]}{[c_2\,(1+t)\,,c_2\,(1-t)]} = \left[\frac{c_1}{c_2}\frac{1-t}{1+t},\frac{c_1}{c_2}\frac{1+t}{1-t}\right]$$
i
$$Z = \left[\frac{c_1}{c_2}\,(1-t)\left(1-\tfrac{b^{-n}}{2}\right),\frac{c_1}{c_2}\,(1+t)\left(1+\tfrac{b^{-n}}{2}\right)\right],$$

situació anàloga a l'anterior.

Proposició 2.44 ***(Terme principal de la granularitat del quocient)***
Siguin $X_1, X_2 \in \mathbb{M}\,(t,n,b)$ designades per $\langle c_1, g_1\rangle$ i per $\langle c_2, g_2\rangle$ respectivament, amb $c_2 \neq 0$. Si $\gamma_{1,2}$ és el menor valor entre $g_{1,2}^{M}$ i 1 tal que

$$\frac{c_1}{c_2} * (1 \pm \gamma_{1,2}) \subseteq \frac{c_1 * (1 \pm g_1)}{c_2}$$
i
$$\frac{c_1}{c_2} * (1 \pm \gamma_{1,2}) \subseteq \frac{c_1}{c_2 * (1 \pm g_2)},$$

es compleix pel quocient

$$\gamma_{1,2} = \max\left\{g_1, \frac{g_2}{1-g_2}\right\}$$

Demostració. La primera de les inclusions

$$\frac{c_1}{c_2} * (1 \pm \gamma_{1,2}) \subseteq \frac{c_1 * (1 \pm g_1)}{c_2},$$

ens imposa $\gamma_{1,2} \geq g_1$.

La segona de les inclusions

$$\frac{c_1}{c_2} * (1 \pm \gamma_{1,2}) \subseteq \frac{c_1}{c_2 * (1 \pm g_2)}$$

és
$$\frac{c_1}{c_2} * [1+\gamma_{1,2}\,,\,1-\gamma_{1,2}] \subseteq \frac{c_1}{c_2} * \left[\frac{1}{1-g_2}\,,\,\frac{1}{1+g_2}\right],$$

d'on es dedueix que cal imposar

$$1+\gamma_{1,2} \geq \frac{1}{1-g_2}$$
i
$$1-\gamma_{1,2} \leq \frac{1}{1+g_2}$$

o equivalentment,

$$\gamma_{1,2} \geq \frac{1}{1-g_2} - 1 = \frac{g_2}{1-g_2}$$

i

$$\gamma_{1,2} \geq 1 - \frac{1}{1+g_2} = \frac{g_2}{1+g_2}$$

i per tant,

$$\gamma_{1,2} = \max\left\{g_1, \frac{g_2}{1-g_2}\right\}.$$

Teorema 2.45 ***(Algorisme de càlcul del quocient)***
Donades les marques normalitzades $X_1, X_2 \in \mathbb{M}(t,n,b)$*, designant* X_1 *per* $\langle c_1, g_1\rangle$ *i* X_2 *per* $\langle c_2, g_2\rangle$ *, tal que* $0 \notin IndX_2$*, el seu* ***quocient*** *el representem per* X_1/X_2 *i el seu valor és el d'una marca* $Z = \langle c_z, t, g_z, n, b\rangle$ *en la qual*

- *El centre és el quocient digital de centres, d'acord amb l'aritmètica de l'escala*
$$c_z = di\left(\frac{c_1}{c_2}\right).$$
- *La tolerància relativa és la mateixa que la tolerància relativa de les dades.*
- *La granularitat relativa és* $g_z = \max\left\{g_1, \frac{g_2}{1-g_2}\right\} + b^{-n}$.

Per tant,

$$X_1/X_2 = \left\langle di\left(\frac{c_1}{c_2}\right), t, \max\left\{g_1, \frac{g_2}{1-g_2}\right\} + b^{-n}, n, b\right\rangle.$$

Demostració. A partir de les proposicions anteriors.
Observació. No descartaríem la possibilitat de considerar l'operador quocient com el mateix operador producte. N'hi hauria prou escrivint

$$X_1/X_2 = \langle c_1, t, g_1, n, b\rangle * \left\langle \frac{1}{c_2}, t, g_2, n, b\right\rangle.$$

Aquest producte pot no ser formalment correcte en el sentit que el valor $\frac{1}{c_2}$ no ha de ser forçosament un element de l'escala DI_n.

Alternativament, utilitzant el concepte de marca inversa estudiat en la definició 2.42 ens queda el recurs de calcular

$$X_1/X_2 := X_1 * X_2^{-1} := \left\langle di\left(c_1 * di\left(\frac{1}{c_2}\right)\right), t, g_z, n, b\right\rangle.$$

Òbviament, aquests resultats, i la reflexió que hi condueix, han de ser consolidats per la programació adequada de l'operació de divisió per part de l'implementador. El raonament anterior solament recorda que una implementació amb aquestes característiques és possible.

Operador màxim.

Proposició 2.46 ***(Tolerància i centre de l'operador màxim)***
Siguin $X_1 = \langle c_1, t, g_1, n, b\rangle$ *i* $X_2 = \langle c_2, t, g_2, n, b\rangle$ *dues marques normalitzades. Si* $Z = \max\{c_1, c_2\} * (1 \pm t) \in I^*(\mathbb{R})$, *es compleix que*

$$\max\{Iv(X_1), Iv(X_2)\} \subseteq Z.$$

(En concret, $\max\{Iv(X_1), Iv(X_2)\} = Z$ *i per tant, no podrà donar-se la inclusió* $\max\{Iv(X_1), Iv(X_2)\} \subseteq \max\{c_1, c_2\} * (1 \pm t) * \left(1 \pm \frac{b^{-n}}{2}\right)$. *Tinguem present, però, que el terme* $\left(1 \pm \frac{b^{-n}}{2}\right)$ *que apareix en la determinació dels operadors forts o dèbils, indica el possible desplaçament digital en el càlcul de la funció. En realitat aquest desplaçament és nul per al cas de l'operador màxim).*

Demostració.

- Si $X_1 \geq 0, X_2 \geq 0$,

$$\max\{Iv(X_1), Iv(X_2)\} =$$

$$= [\max\{c_1(1+t), c_2(1+t)\}, \max\{c_1(1-t), c_2(1-t)\}]$$

i

$$Z = [\max\{c_1, c_2\}(1+t), \max\{c_1, c_2\}(1-t)].$$

- Si $X_1 \leq 0, X_2 \leq 0$

$$\max\{Iv(X_1), Iv(X_2)\} =$$

$$= [\max\{c_1(1-t), c_2(1-t)\}, \max\{c_1(1+t), c_2(1+t)\}]$$

i

$$Z = [\max\{c_1, c_2\}(1-t), \max\{c_1, c_2\}(1+t)].$$

- Si $X_1 \geq 0, X_2 \leq 0$ (de forma anàloga si fos a l'inrevés)

$$\max\{Iv(X_1), Iv(X_2)\} =$$

$$= [\max\{c_1(1+t), c_2(1-t)\}, \max\{c_1(1-t), c_2(1+t)\}],$$

i com que $c_1 \geq 0$ i $c_2 < 0$

$$Z = [c_1(1+t), c_1(1-t)].$$

Proposició 2.47 ***(Terme principal de la granularitat de l'operador màxim)***

Donades les marques normalitzades $X_1, X_2 \in \mathbb{M}(t,n,b)$, designant X_1 per $\langle c_1, g_1\rangle$ i X_2 per $\langle c_2, g_2\rangle$, sigui $\gamma_{1,2}$ el menor valor entre $g_{1,2}^M$ i 1 tal que

$$\max\{c_1, c_2\} * (1 \pm \gamma_{1,2}) \subseteq \max\left\{c_1 * (1 \pm g_1), \dot{c_2}\right\}$$

i

$$\max\{c_1, c_2\} * (1 \pm \gamma_{1,2}) \subseteq \max\left\{\dot{c_1}, (c_2 * (1 \pm g_2))\right\},$$

es compleix per l'operador màxim

$$\gamma_{1,2} = g_{1,2}^M.$$

Demostració. Sense pèrdua de generalitat podem suposar $\max\{c_1, c_2\} = c_1$. D'aquesta forma ens cal únicament fer la distinció dels casos següents

1. $c_1 \geq 0$. (per no allargar innecessàriament la demostració, suposem també $c_2 \geq 0$ ja que en el cas $c_2 \leq 0$ la demostració és immediata)

$$\max\{c_1, c_2\} * (1 \pm \gamma_{1,2}) = [c_1(1+\gamma_{1,2}), c_1(1-\gamma_{1,2})].$$

$$\max\left\{c_1 * (1 \pm g_1), \dot{c_2}\right\} = [c_1(1+g_1), \max\{c_1(1-g_1), c_2\}].$$

$$\max\left\{\dot{c_1}, (c_2 * (1 \pm g_2))\right\} = [\max\{c_1, c_2(1+g_2)\}, c_1].$$

Per complir-se les inclusions indicades ens cal

$$\begin{array}{l} c_1(1+\gamma_{1,2}) \geq c_1(1+g_1). \\ c_1(1-\gamma_{1,2}) \leq \max\{c_1(1-g_1), c_2\}. \\ c_1(1+\gamma_{1,2}) \geq \max\{c_1, c_2(1+g_2)\}. \\ c_1(1-\gamma_{1,2}) \leq c_1. \end{array}$$

desigualtats que unides a l'exigència $\gamma_{1,2} \geq g_1$ i $\gamma_{1,2} \geq g_2$ ens imposen $\gamma_{1,2} = g_{1,2}^M$.

2. $c_1 < 0$.

$$\max\{c_1, c_2\} * (1 \pm \gamma_{1,2}) = [c_1 (1 - \gamma_{1,2}), c_1 (1 + \gamma_{1,2})].$$

$$\max\left\{c_1 * (1 \pm g_1), \underset{\cdot}{c_2}\right\} = [c_1 (1 - g_1), \max\{c_1 (1 + g_1), c_2\}].$$

$$\max\left\{\underset{\cdot}{c_1}, (c_2 * (1 \pm g_2))\right\} = [\max\{c_1, c_2 (1 - g_2)\}, c_1].$$

Per tant, ens cal

$$\begin{array}{l} c_1 (1 - \gamma_{1,2}) \geq c_1 (1 - g_1). \\ c_1 (1 + \gamma_{1,2}) \leq \max\{c_1 (1 + g_1), c_2\}. \\ c_1 (1 - \gamma_{1,2}) \geq \max\{c_1, c_2 (1 - g_2)\}. \\ c_1 (1 + \gamma_{1,2}) \leq c_1. \end{array}$$

Tal com hem dit abans, aquestes desigualtats unides a l'exigència $\gamma_{1,2} \geq g_1$ i $\gamma_{1,2} \geq g_2$ ens imposen $\gamma_{1,2} = g_{1,2}^M$.

D'ambdues situacions es dedueix que el menor valor $\gamma_{1,2}$ buscat és

$$\gamma_{1,2} = g_{1,2}^M.$$

Teorema 2.48 ***(Algorisme de càlcul de l'operador màxim)***

*Donades les marques normalitzades $X_1, X_2 \in \mathbb{M}(t, n, b)$, designant X_1 per $\langle c_1, g_1 \rangle$ i X_2 per $\langle c_2, g_2 \rangle$, la **màxima** d'ambdues marques la representem per $\max\{X_1, X_2\}$ i el seu valor és el de la marca $Z = \langle c_z, t, g_z, n, b \rangle$ en la qual*

- *El centre és el major dels centres de les dades.*
- *La tolerància relativa és la que ens dóna el tipus de les dades.*
- *La granularitat relativa[10] és la més gran de les granularitats relatives de les dades, $g_z = g_{1,2}^M$*

Per tant,

$$\max\{X_1, X_2\} = \left\langle \max\{c_1, c_2\}, t, g_{1,2}^M, n, b \right\rangle.$$

Demostració. A partir de les proposicions anteriors.

[10] L'operador màxim és un operador d'elecció i no comporta desplaçaments digitals dels centres de les marques.

Operador mínim

El procés que ens ha portat a la construcció i definició de l'operador màxim, podem repetir-lo per l'operador mínim. Sense entrar, doncs, en detalls tindrem

Proposició 2.49 ***(Tolerància i centre de l'operador mínim)***
Si $X_1 = \langle c_1, t, g_1, n, b \rangle$ *i* $X_2 = \langle c_2, t, g_2, n, b \rangle$ *són dues marques normalitzades i* $Z = \min\{c_1, c_2\} * (1 \pm t)$, *es compleix*

$$\min\{Iv(X_1), Iv(X_2)\} \subseteq Z.$$

Teorema 2.50 ***(Algorisme de càlcul de l'operador mínim)***
Donades les marques normalitzades $X_1, X_2 \in \mathbb{M}(t, n, b)$, *designant* X_1 *per* $\langle c_1, g_1 \rangle$ *i* X_2 *per* $\langle c_2, g_2 \rangle$, *la* ***mínima*** *d'ambdues marques la representem per* $\min\{X_1, X_2\}$ *i el seu valor és el d'una marca* $Z = \langle c_z, t, g_z, n, b \rangle$ *en la qual*

- *El centre és el menor dels centres de les dades.*
- *La tolerància relativa és la que ens dóna el tipus de les dades.*
- *La granularitat relativa és la més gran de les granularitats relatives*

Per tant,

$$\min\{X_1, X_2\} = \left\langle \min\{c_1, c_2\}, t,\ g_{1,2}^{M}, n, b \right\rangle.$$

L'operador suma amb operands del mateix signe.

Proposició 2.51 ***(Tolerància i centre de la suma amb operands del mateix signe)***
Siguin $X_1 = \langle c_1, t, g_1, n, b \rangle$, $X_2 = \langle c_2, t, g_2, n, b \rangle \in \mathbb{M}(t, n, b)$ *marques normalitzades amb* $signe(c_1) = signe(c_2)$. *Es compleix*

$$\begin{array}{c} Iv(X_1) + Iv(X_2) \subseteq (c_1 + c_2) * (1 \pm t) \\ i \\ Iv(X_1) + Iv(X_2) \nsubseteq (c_1 + c_2) * (1 \pm t) * \left(1 \pm \frac{b-n}{2}\right). \end{array}$$

(és a dir, la suma amb operands del mateix signe és un operador dèbil per a (c_1, c_2)*)*

Demostració.

1. $c_1 \geq 0$ i $c_2 \geq 0$

$$\begin{aligned} Iv\,(X_1) + Iv\,(X_2) = &\quad [c_1\,(1+t)\,, c_1\,(1-t)] + [c_2\,(1+t)\,, c_2\,(1-t)] = \\ = &\quad [(c_1+c_2)\,(1+t)\,, (c_1+c_2)\,(1-t)]\,. \end{aligned}$$

Es compleix, doncs, la igualtat intervalar

$$Iv\,(X_1) + Iv\,(X_2) = (c_1+c_2) * (1 \pm t)\,.$$

2. $c_1 < 0$ i $c_2 < 0$

$$\begin{aligned} Iv\,(X_1) + Iv\,(X_2) = &\quad [c_1\,(1-t)\,, c_1\,(1+t)] + [c_2\,(1-t)\,, c_2\,(1+t)] = \\ = &\quad [(c_1+c_2)\,(1-t)\,, (c_1+c_2)\,(1+t)]\,, \end{aligned}$$

complint-se també la igualtat

$$Iv\,(X_1) + Iv\,(X_2) = (c_1+c_2) * (1 \pm t)\,.$$

No es tracta d'un operador fort per a (c_1, c_2)

$$Iv\,(X_1) + Iv\,(X_2) \nsubseteq (c_1+c_2) * (1 \pm t) * \left(1 \pm \tfrac{b^{-n}}{2}\right)$$

ja que

$$Iv\,(X_1) + Iv\,(X_2) = (c_1+c_2) * (1 \pm t) \supset (c_1+c_2) * (1 \pm t) * \left(1 \pm \tfrac{b^{-n}}{2}\right).$$

Proposició 2.52 ***(Terme principal de la granularitat de la suma amb operands del mateix signe)***

Donades dues marques normalitzades $X_1, X_2 \in \mathbb{M}\,(t,n,b)$, designant X_1 per $\langle c_1, g_1\rangle$ i X_2 per $\langle c_2, g_2\rangle$, amb signe $(c_1) =$ signe (c_2), si es pren $\gamma_{1,2}$ el menor valor entre $g_{1,2}^M$ i 1 tal que

$$\begin{aligned} &(c_1+c_2) * (1 \pm \gamma_{1,2}) \subseteq c_1 * (1 \pm g_1) + \underset{\cdot}{c_2} \\ &i \\ &(c_1+c_2) * (1 \pm \gamma_{1,2}) \subseteq \underset{\cdot}{c_1} + c_2 * (1 \pm g_2)\,, \end{aligned}$$

es compleix

$$\gamma_{1,2} = g_{1,2}^M.$$

Demostració. Una demostració purament intervalar d'aquesta proposició és

- $c_1 * (1 \pm g_1) + \underset{\cdot}{c_2} = (c_1 \underset{\cdot}{+} c_2) \pm c_1 g_1 = (c_1 + c_2) * \left(1 \pm \frac{c_1}{c_1+c_2} g_1\right).$

- $\underset{\cdot}{c_1} + c_2 * (1 \pm g_2) = (c_1 \underset{\cdot}{+} c_2) \pm c_2 g_2 = (c_1 + c_2) * \left(1 \pm \frac{c_2}{c_1+c_2} g_2\right).$

en què els termes $\pm c_1 g_1$ i $\pm c_2 g_2$ representen els intervals impropis $Impr\,[c_1 g_1, -c_1 g_1]$ i $Impr\,[c_2 g_2, -c_2 g_2]$ respectivament.

Observem que en aquesta demostració s'aplica la propietat distributiva del producte intervalar respecte de la suma en intervals [37, sec 3.5], tenint en compte que $\underset{\cdot}{c_1}$ i $\underset{\cdot}{c_2}$ són intervals puntuals.

Observació. Podem fer una segona demostració d'aquesta proposició utilitzant els extrems dels intervals

1. Si $c_1 \geq 0, c_2 \geq 0$ es té

$$(c_1 + c_2) * (1 \pm \gamma_{1,2}) = [(c_1 + c_2) * (1 + \gamma_{1,2}), (c_1 + c_2) * (1 - \gamma_{1,2})].$$

$$c_1 * (1 \pm g_1) + \underset{\cdot}{c_2} = \left[(c_1 + c_2)\left(1 + \tfrac{c_1}{c_1+c_2} g_1\right), (c_1 + c_2)\left(1 - \tfrac{c_1}{c_1+c_2} g_1\right)\right].$$

$$\underset{\cdot}{c_1} + c_2 * (1 \pm g_2) = \left[(c_1 + c_2)\left(1 + \tfrac{c_2}{c_1+c_2} g_2\right), (c_1 + c_2)\left(1 - \tfrac{c_2}{c_1+c_2} g_2\right)\right].$$

Necessitem, doncs,

$$\begin{aligned}
(c_1 + c_2) * (1 + \gamma_{1,2}) &\geq (c_1 + c_2)\left(1 + \tfrac{c_1}{c_1+c_2} g_1\right). \\
(c_1 + c_2) * (1 - \gamma_{1,2}) &\leq (c_1 + c_2)\left(1 - \tfrac{c_1}{c_1+c_2} g_1\right). \\
(c_1 + c_2) * (1 + \gamma_{1,2}) &\geq (c_1 + c_2)\left(1 + \tfrac{c_2}{c_1+c_2} g_2\right). \\
(c_1 + c_2) * (1 - \gamma_{1,2}) &\leq (c_1 + c_2)\left(1 - \tfrac{c_2}{c_1+c_2} g_2\right).
\end{aligned}$$

desigualtats que ens imposen $\gamma_{1,2} \geq \frac{c_1}{c_1+c_2} g_1$ i $\gamma_{1,2} \geq \frac{c_2}{c_1+c_2} g_2$.

Per tant, n'hi hauria prou si prenguéssim

$$\gamma_{1,2} = \max\left\{\frac{c_1}{c_1 + c_2} g_1, \frac{c_2}{c_1 + c_2} g_2, g_{1,2}^M\right\} = g_{1,2}^M.$$

2. Si $c_1 < 0, c_2 < 0$ es té

$$(c_1 + c_2) * (1 \pm \gamma_{1,2}) = [(c_1 + c_2) * (1 - \gamma_{1,2}), (c_1 + c_2) * (1 + \gamma_{1,2})].$$

$$c_1 * (1 \pm g_1) + \underset{\cdot}{c_2} = \left[(c_1 + c_2)\left(1 - \tfrac{c_1}{c_1+c_2} g_1\right), (c_1 + c_2)\left(1 + \tfrac{c_1}{c_1+c_2} g_1\right)\right].$$

$$\underset{\cdot}{c_1} + c_2 * (1 \pm g_2) = \left[(c_1 + c_2)\left(1 - \tfrac{c_2}{c_1+c_2} g_2\right), (c_1 + c_2)\left(1 + \tfrac{c_2}{c_1+c_2} g_2\right)\right].$$

Les desigualtats que caldrà que es compleixin seran

$$\begin{aligned}(c_1+c_2)*(1-\gamma_{1,2}) &\geq (c_1+c_2)\left(1-\tfrac{c_1}{c_1+c_2}g_1\right),\\ (c_1+c_2)*(1+\gamma_{1,2}) &\leq (c_1+c_2)\left(1+\tfrac{c_1}{c_1+c_2}g_1\right),\\ (c_1+c_2)*(1-\gamma_{1,2}) &\geq (c_1+c_2)\left(1-\tfrac{c_2}{c_1+c_2}g_2\right),\\ (c_1+c_2)*(1+\gamma_{1,2}) &\leq (c_1+c_2)\left(1+\tfrac{c_2}{c_1+c_2}g_2\right),\end{aligned}$$

d'on necessàriament s'imposa $\gamma_{1,2} \geq \frac{c_1}{c_1+c_2}g_1$ i $\gamma_{1,2} \geq \frac{c_2}{c_1+c_2}g_2$.

Per tant, prendríem

$$\gamma_{1,2} = \max\left\{\frac{c_1}{c_1+c_2}g_1,\ \frac{c_2}{c_1+c_2}g_2,\ g_{1,2}^M\right\} = g_{1,2}^M.$$

Teorema 2.53 ***(Algorisme de càlcul de la suma amb operands del mateix signe)***

Donades dues marques normalitzades $X_1, X_2 \in \mathbb{M}(t,n,b)$, designant X_1 per $\langle c_1, g_1\rangle$ i X_2 per $\langle c_2, g_2\rangle$, amb $signe(c_1) = signe(c_2)$[11] *la seva* ***suma,*** *que representem per $Z = X_1 + X_2$ és una marca $Z = \langle c_z, t, g_z, n, b\rangle$ en la qual*

- *El centre és la suma digital de centres, d'acord amb l'aritmètica de l'escala*
$$c_z = di\,(c_1+c_2)\,.$$
- *La tolerància relativa és la que ens ve donada pel tipus de les dades.*
- *La granularitat relativa g_z és $g_z = g_{1,2}^M + b^{-n}$.*

és a dir,

$$X_1 + X_2 = \left\langle di\,(c_1+c_2)\,,\ t,\ g_{1,2}^M + b^{-n},\ n, b\right\rangle.$$

Demostració. A partir de les proposicions anteriors.

Observació. Si la granularitat es tractés com un error relatiu associat al centre de la marca, obtindríem que la granularitat per la suma hauria d'estar compresa entre la mínima i la màxima granularitats de les dades, ja que

$$c_1*(1\pm g_1) + c_2*(1\pm g_2) = (c_1+c_2) \pm (c_1g_1 + c_2g_2)$$

[11] Considerem també que les marques tenen el mateix signe el cas en què el centre d'una de les marques sigui 0.

i donat que $signe\,(c_1) = signe\,(c_2)$, podrem escriure

$$\pm\frac{|c_1 g_1 + c_2 g_2|}{|c_1 + c_2|} = \pm\left(\frac{|c_1|}{|c_1 + c_2|}\cdot g_1 + \frac{|c_2|}{|c_1 + c_2|}\cdot g_2\right);$$

expressió que està compresa entre g_1 i g_2, ja que es tracta d'una combinació convexa. Donat que les dades tenen la mateixa tolerància, sense necessitat de tipificar tenim que la tolerància de la suma serà la mateixa tolerància t. En el càlcul de l'índex d'imprecisió del resultat ens trobem que aquest valor serà

$$\frac{g'}{t'} = \frac{g'}{t} \leq \frac{g^M_{1,2}}{t},$$

i com que no acceptem que la marca resultant sigui menys imprecisa que cap de les dades, hem d'acceptar que g_z sigui $g^M_{1,2}$.

L'operador suma amb operands de signe diferent.

Proposició 2.54 ***(Tolerància i centre de la suma amb operands de signe diferent)***
Donades les marques $X_1 = \langle c_1, t, g_1, n, b\rangle$, $X_2 = \langle c_2, t, g_2, n, b\rangle \in \mathbb{M}\,(t,n,b)$ amb $signe\,(c_1) \neq signe\,(c_2)$ i $|c_1| \neq |c_2|$, es compleix

$$Iv\,(X_1) + Iv\,(X_2) \subseteq (c_1 + c_2) * (1 \pm t)$$
$$i$$
$$Iv\,(X_1) + Iv\,(X_2) \nsubseteq (c_1 + c_2) * (1 \pm t) * \left(1 \pm \tfrac{b^{-n}}{2}\right);$$

és a dir, la suma amb operands de signe diferent és un operador dèbil per (c_1, c_2)

Demostració. Sense pèrdua de generalitat podem suposar $c_1 > 0$ i $c_2 < 0$. D'aquesta forma,

$$Iv\,(X_1) + Iv\,(X_2) = [c_1\,(1+t) + c_2\,(1-t)\,, c_1\,(1-t) + c_2\,(1+t)]\,.$$

Anem a veure la inclusió $Iv\,(X_1) + Iv\,(X_2) \subseteq (c_1 + c_2) * (1 \pm t)$ fent la distinció dels casos $|c_1| > |c_2|$ i $|c_1| < |c_2|$.

1. Si $|c_1| > |c_2|$ es complirà

$$(c_1 + c_2) * (1 \pm t) = [(c_1 + c_2)\cdot(1+t)\,, (c_1 + c_2)\cdot(1-t)]\,.$$

La inclusió que volem veure que es verifica, exigeix

$$\begin{gathered} c_1\,(1+t)+c_2\,(1-t)\geq(c_1+c_2)\cdot(1+t) \\ \text{i} \\ c_1\,(1-t)+c_2\,(1+t)\leq(c_1+c_2)\cdot(1-t)\,, \end{gathered}$$

desigualtats que en desenvolupar ambdós membres esdevenen

$$\begin{gathered} -c_2t\geq c_2t \\ \text{i} \\ c_2t\leq -c_2t \end{gathered}$$

certes en suposar $c_2<0$.

2. Si $|c_1|<|c_2|$ tindrem

$$(c_1+c_2)*(1\pm t)=[(c_1+c_2)\cdot(1-t)\,,(c_1+c_2)\cdot(1+t)]\,.$$

La inclusió desitjada ens imposa

$$\begin{gathered} c_1\,(1+t)+c_2\,(1-t)\geq(c_1+c_2)\cdot(1-t) \\ \text{i} \\ c_1\,(1-t)+c_2\,(1+t)\leq(c_1+c_2)\cdot(1+t)\,, \end{gathered}$$

desigualtats que en desenvolupar ambdós membres esdevenen

$$\begin{gathered} c_1t\geq -c_1t \\ \text{i} \\ -c_1t\leq c_1t \end{gathered}$$

desigualtats certes al ser $c_1>0$.

Per veure,

$$Iv\,(X_1)+Iv\,(X_2)\nsubseteq(c_1+c_2)*(1\pm t)*\left(1\pm\tfrac{b^{-n}}{2}\right),$$

podríem prendre $c_1=4.01E2,\ c_2=-1.E0,\ t=10^{-4}$ i $b^{-n}=10^{-5}$, obtenint

$$\begin{array}{ll} Iv\,(X_1)+Iv\,(X_2)= & [400.0402, 399.9598]\,. \\ (c_1+c_2)*(1\pm t)*\left(1\pm\frac{b^{-n}}{2}\right) & [400.0420002, 399.9580002]\,. \end{array}$$

Proposició 2.55 ***(Terme principal de la granularitat de la suma amb operands de diferent signe)***

Donades dues marques normalitzades $X_1, X_2 \in \mathbb{M}(t,n,b)$, *designant* X_1 *per* $\langle c_1, g_1\rangle$ *i* X_2 *per* $\langle c_2, g_2\rangle$, *amb* $signe(c_1) \neq signe(c_2)$ *i verificant-se* $c_1 + c_2 \neq 0$[12] *si prenem* $\gamma_{1,2}$ *el menor valor entre* $g_{1,2}^M$ *i* 1 *tal que*

$$\begin{array}{l}(c_1+c_2)*(1\pm\gamma_{1,2}) \subseteq c_1*(1\pm g_1) + \underset{\cdot}{c_2} \\ i \\ (c_1+c_2)*(1\pm\gamma_{1,2}) \subseteq \underset{\cdot}{c_1} + c_2*(1\pm g_2)\,,\end{array}$$

es compleix

$$\gamma_{1,2} = \max\left\{\left|\frac{|c_1|}{|c_1|-|c_2|}\right| g_1,\ \left|\frac{|c_2|}{|c_1|-|c_2|}\right| g_2,\ g_{1,2}^M\right\}.$$

Demostració.

1. $c_1 > 0$ (i per tant, $c_2 < 0$), es té

$$\begin{aligned} c_1*(1\pm g_1)+\underset{\cdot}{c_2} = & \ [c_1(1+g_1)+c_2, c_1(1-g_1)+c_2] = \\ = & \left[(c_1+c_2)\left(1+\tfrac{c_1}{c_1+c_2}g_1\right), (c_1+c_2)\left(1-\tfrac{c_1}{c_1+c_2}g_1\right)\right] = \\ = & \left[(c_1+c_2)\left(1+\tfrac{|c_1|}{|c_1|-|c_2|}g_1\right), (c_1+c_2)\left(1-\tfrac{|c_1|}{|c_1|-|c_2|}g_1\right)\right] = \\ = & \ (c_1+c_2)*\left(1\pm\left|\tfrac{|c_1|}{|c_1|-|c_2|}\right|g_1\right). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \underset{\cdot}{c_1} + c_2*(1\pm g_2) = & \ [c_1+c_2(1-g_2), c_1+c_2(1+g_2)] = \\ = & \left[(c_1+c_2)\left(1-\tfrac{c_2}{c_1+c_2}g_2\right), (c_1+c_2)\left(1+\tfrac{c_2}{c_1+c_2}g_2\right)\right] = \\ = & \left[(c_1+c_2)\left(1+\tfrac{|c_2|}{|c_1|-|c_2|}g_2\right), (c_1+c_2)\left(1-\tfrac{|c_2|}{|c_1|-|c_2|}g_2\right)\right] \\ = & \ (c_1+c_2)*\left(1\pm\left|\tfrac{|c_2|}{|c_1|-|c_2|}\right|g_2\right). \end{aligned}$$

desigualtats que ens imposen $\gamma_{1,2} \geq \left|\frac{|c_1|}{|c_1|-|c_2|}\right| g_1$ i $\gamma_{1,2} \geq \left|\frac{|c_2|}{|c_1|-|c_2|}\right| g_2$.
Per tant, n'hi hauria prou si prenguéssim

$$\gamma_{1,2} = \max\left\{\left|\frac{|c_1|}{|c_1|-|c_2|}\right| g_1,\ \left|\frac{|c_2|}{|c_1|-|c_2|}\right| g_2,\ g_{1,2}^M\right\}.$$

2. $c_1 < 0$ (i per tant, $c_2 > 0$) tenim, per commutativitat de la suma intervalar, un cas anàleg a l'anterior.

[12] S'exclou també el cas $c_1 = c_2 = 0$, ja que el considerem com a suma amb operands del mateix signe.

Del que hem vist en resulta

$$\gamma_{1,2} = \max\left\{\left|\frac{|c_1|}{|c_1| - |c_2|}\right| g_1,\ \left|\frac{|c_2|}{|c_1| - |c_2|}\right| g_2,\ g^M_{1,2}\right\}.$$

Observació. Cal destacar que si prèviament al càlcul de la suma amb operands de diferent signe s'hagués fet coerció de les marques X_1 i X_2 a la granularitat màxima, es tindria que aquell valor màxim és $\left|\frac{\max\{|c_1|,|c_2|\}}{|c_1|-|c_2|}\right| g^M_{1,2}$. En les altres operacions estudiades, aquesta coerció hauria estat irrellevant, vistos els resultats obtinguts. En el cas de la suma amb sumands de signes diferents, no.

Teorema 2.56 ***(Càlcul de la suma amb operands de diferent signe)*** *Donades dues marques normalitzades $X_1, X_2 \in \mathbb{M}(t,n,b)$, designant X_1 per $\langle c_1, g_1\rangle$ i X_2 per $\langle c_2, g_2\rangle$, amb $signe(c_1) \neq signe(c_2)$ i verificant-se $c_1 + c_2 \neq 0$, la seva* ***suma****, que representem per $Z = X_1 + X_2$ és una marca $Z = \langle c_z, t, g_z, n, b\rangle$ en la qual*

- *El centre és la suma digital de centres, d'acord amb l'aritmètica de l'escala*
$$c_z = di\,(c_1 + c_2).$$
- *La tolerància relativa és la que ens ve donada pel tipus de les dades.*
- *La granularitat relativa g_z és*
$$g_z = \max\left\{g^M_{1,2}, \left|\frac{|c_1|\,g_1}{|c_1| - |c_2|}\right|, \left|\frac{|c_2|\,g_2}{|c_1| - |c_2|}\right|\right\} + b^{-n}.$$

Per tant,

$$X_1 + X_2 =$$

$$= \left\langle di\,(c_1 + c_2),\ t, \max\left\{g^M_{1,2}, \left|\tfrac{|c_1|g_1}{|c_1|-|c_2|}\right|, \left|\tfrac{|c_2|g_2}{|c_1|-|c_2|}\right|\right\} + b^{-n},\ n, b\right\rangle.$$

Demostració. A partir de les proposicions anteriors.

Observació. La suma de marques amb operands de diferent signe no està definida quan la suma dels centres és nul·la, (llevat, com ja s'ha dit, del cas en què ambdós centres fossin zero, perquè suposaríem que tenen el mateix signe). Podem acceptar situacions en què hi ha implícita una diferència d'aquest tipus, però en realitat aquesta diferència no es calcula. En front d'aquesta situació podem admetre la marca zero per definició.

Propietats de la suma amb operands del mateix o de diferent signe

La suma de marques, sempre que estigui definida, compleix les propietats

- Commutativa: Donades $X_1, X_2 \in \mathbb{M}(t,n,b)$,

  $$X_1 + X_2 \approx_\alpha X_2 + X_1,$$

  sempre que les granularitats dels resultats siguin compatibles amb αt.

  Demostració. Analitzem, com hem fet per la propietat commutativa del producte, el cas més desfavorable en què $di\,(c_1+c_2)$ i $di\,(c_2+c_1)$ són els extrems de l'interval $(c_1+c_2)*\left(1 \pm \frac{b^{-n}}{2}\right)$. Suposem $di\,(c_1+c_2) = (c_1+c_2)*\left(1+\frac{b^{-n}}{2}\right)$, $di\,(c_2+c_1) = (c_1+c_2)*\left(1-\frac{b^{-n}}{2}\right)$ i $(c_1+c_2) > 0$. En aquest cas

  $$\begin{aligned} di\,(c_1+c_2)\,(1-b^{-n}) = {} & (c_1+c_2)\left(1+\frac{b^{-n}}{2}\right)(1-b^{-n}) = \\ = {} & (c_1+c_2)\left(1+\frac{b^{-n}}{2} - b^{-n} - \frac{b^{-2n}}{2}\right) < \\ < {} & (c_1+c_2)\left(1-\frac{b^{-n}}{2}\right) = di\,(c_2+c_1)\,. \end{aligned}$$

  el que ens acaba la demostració, ja que $\alpha t \geq b^{-n}$.

- Per cada marca $X = \langle c, g\rangle \in \mathbb{M}(t,n,b)$, la família de marques

  $$0 := \{\langle 0,\,\eta\rangle \in \mathbb{M}(t,n,b)\}$$

  verifica

  $$X + 0 = 0 + X = X.$$

Definició 2.57 ***(Simètric d'una marca)***

Donada la marca $X = \langle c,t,g,n,b\rangle$, anomenem ***marca simètrica*** *d'X i la representem per $-X$ a la marca*

$$-X := \langle -c,t,g,n,b\rangle\,.$$

Observació. Aquesta definició és purament verbal, perquè no és permès de calcular la suma de marques $X + (-X)$, ja que la granularitat esdevindria infinita. De fet, tal com ja s'ha esmentat, a una marca $\langle c,t,g,n,b\rangle$ cal imposar-li $\frac{g}{t} < 1$ i caldria deixar com no definides aquelles marques que verifiquessin $g \geq t$. És possible de representar la marca no definida per $\langle c, t, t, n, b \rangle$; és a dir, indicant que s'ha arribat a una situació en la qual la marca no és vàlida com a tal ($g = t$). A aquesta situació s'hi podria arribar per un excés d'operacions o bé per a una diferència (suma amb sumands de signe oposat) de valors pròxims.

Interpretació semàntica dels càlculs d'un sol pas amb operadors de marques

Teorema 2.58

Donades les marques $X_1, X_2 \in \mathbb{M}(t, n, b)$ designades per $\langle c_1, g_1 \rangle$ i $\langle c_2, g_2 \rangle$ respectivament, si $f_{\mathbb{M}(t,n)}$ és un operador de marques (definició 2.35) i $Z = f_{\mathbb{M}(t,n)}(X_1, X_2)$, aleshores es compleix que

$$fR\left(Iv\left(X_1\right), Iv\left(X_2\right)\right) \subseteq Iv\left(Z\right) * prop\left(1 \pm \tfrac{b^{-n}}{2}\right) \subseteq Exsh\left(Z\right).$$

Demostració. Es verifica

$$fR\left(Iv\left(X_1\right), Iv\left(X_2\right)\right) \subseteq f\left(c_1, c_2\right) * \left(1 \pm t\right)$$

i com que

$$f\left(c_1, c_2\right) \in dif\left(c_1, c_2\right) * \left(1 \pm \tfrac{b^{-n}}{2}\right)'$$

es té la inclusió

$$f\left(c_1, c_2\right) * \left(1 \pm t\right) \subseteq dif\left(c_1, c_2\right) * \left(1 \pm t\right) * prop\left(1 \pm \tfrac{b^{-n}}{2}\right).$$

A la vegada i perquè $g_z \geq b^{-n} \geq \frac{b^{-n}}{2}$, es té

$$prop\left(1 \pm \tfrac{b^{-n}}{2}\right) \subseteq prop\left(1 \pm g_z\right),$$

d'on resulta la inclusió final.

Corol·lari 2.59 ***(Semàntica intervalar dels operadors de marques)***

Donat $f_{\mathbb{M}(t,n)}$ un operador de marques sobre $\mathbb{M}(t, n, b)$, si $X_1, X_2 \in \mathbb{M}(t, n, b)$ i $Z = f_{\mathbb{M}(t,n)}(X_1, X_2)$, es compleix que

$$U\left(z, Exsh'\left(Z\right)\right) E\left(x_1, Iv'\left(X_1\right)\right) E\left(x_2, Iv'\left(X_2\right)\right) \; z = f\left(x_1, x_2\right).$$

Demostració. A partir de la inclusió demostrada en el teorema 2.58,

$$fR\left(Iv\left(X_1\right), Iv\left(X_2\right)\right) \subseteq Exsh\left(Z\right),$$

i aplicant la $*-$semàntica intervalar (Vegeu, per exemple [5, Sec 3.2]), ja que es tracta d'intervals impropis.

Teorema 2.60 ***(Semàntica dels operadors de marques)***
Sota les condicions del teorema 2.58, si $f_{\mathbb{M}(t,n)}$ *és un operador de marques sobre* $\mathbb{M}(t,n,b)$*, donades les marques* $X_1, X_2 \in \mathbb{M}(t,n,b)$ *designades per* $\langle c_1, g_1\rangle$ *i* $\langle c_2, g_2\rangle$ *respectivament, si* $Z = f_{\mathbb{M}(t,n)}(X_1, X_2)$*, es compleix que*

$$U\left(z, Exsh'(Z)\right)\ z \in \left(f\left(c_1, c_2\right) * (1 \pm t)\right)'$$

Demostració. En tenim prou veient que

$$Exsh'(Z) \subseteq \left(f\left(c_1, c_2\right) * (1 \pm t)\right)'.$$

Ara bé, es compleix

$$f\left(c_1, c_2\right) \in dif\left(c_1, c_2\right) * prop\left(1 \pm \frac{b^{-n}}{2}\right),$$

és a dir,

$$f\left(c_1, c_2\right) \subseteq dif\left(c_1, c_2\right) * prop\left(1 \pm \tfrac{b^{-n}}{2}\right).$$

Multiplicant intervalarment ambdós membres de la inclusió per $(1 \pm t)$, i per inclusivitat del producte obtenim

$$\begin{aligned} f\left(c_1, c_2\right) * (1 \pm t) \subseteq\ & dif\left(c_1, c_2\right) * (1 \pm t) * prop\left(1 \pm \tfrac{b^{-n}}{2}\right) \subseteq \\ \subseteq\ & dif\left(c_1, c_2\right) * (1 \pm t) * prop\left(1 \pm g_z\right) = Exsh(Z). \end{aligned}$$

I per tractar-se d'intervals impropis, tindrem

$$Exsh'(Z) \subseteq \left(f\left(c_1, c_2\right) * (1 \pm t)\right)'.$$

2.4.4 Funció de marques

Definició 2.61 ***(Funció de marques)***
Donada $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ *una funció racional real contínua, en la qual tots els operadors que la formen admeten operadors de marques associats, per les marques normalitzades* $X_1, \ldots, X_k \in \mathbb{M}(t,n,b)$ *designant cada* X_i *per* $\langle c_i, g_i\rangle$*, la* ***funció de marques associada a*** f *sobre els arguments* $X_1, \ldots, X_k$*, la representem per* $f_{\mathbb{M}(t,n)}(X_1, \ldots, X_k)$ *i és aquella funció en la qual*

1. *Cada variable* x_i *en la funció* f*, és substituïda per la marca* X_i *corresponent, considerant independents les incidències de les variables multiincidents, si n'hi hagués.*

2. *Cada operador dels que constitueixen l'arbre sintàctic de la funció f és substituït per l'operador de marques corresponent.*

Observació. Ens permetem escriure simplement $f_{\mathbb{M}}(X_1, \ldots, X_k)$ quan el context permeti d'obviar els valors n i t del tipus.

Definició 2.62 ***(Marca associada a l'ombra)***
Per una marca $X = \langle c, t, g, n, b \rangle \in \mathbb{M}(t, n, b)$, de la qual es considera l'ombra externa $c * (1 \pm t) * prop(1 \pm g)$, definim la ***marca associada a*** *$Exsh(X)$ i la simbolitzem per $ExshMark(X)$ a la marca*

$$\tilde{X} := \langle c, t - g(1+t), b^{-n}, n, b \rangle \in \mathbb{M}(t - g(1+t), n, b).$$

Observació. Hem exposat al llarg d'aquest capítol la necessitat d'una condició de significació mínima del tipus $g < t$ perquè una marca $X = \langle c, t, g, n, b \rangle$ sigui vàlida. Amb la definició que acabem de donar, ens adonem que la condició de validesa per la marca $ExshMark(X)$ seria

$$b^{-n} < t - g(1+t)$$

desigualtat que ens imposa

$$g < \frac{t - b^{-n}}{1+t}.$$

Ja que el concepte de marca associada a l'ombra externa serà la que ens permetrà d'encadenar les semàntiques d'un càlcul d'una funció racional amb més d'un pas, la desigualtat $g < \frac{t-b^{-n}}{1+t}$ haurà de prevaldre sobre la que fins ara ens exigia únicament que $g < t$.

Definició 2.63 ***(Tolerància efectiva)***
Definim la ***tolerància efectiva*** *de la marca $X = \langle c, t, g, n, b \rangle \in \mathbb{M}(t, n, b)$, com el valor*

$$\tilde{t} := t - g(1+t).$$

Proposició 2.64 *Donada la marca $X = \langle c, t, g, n, b \rangle \in \mathbb{M}(t, n, b)$, si considerem $\tilde{X}$ la marca associada a l'ombra externa d'X, es compleix que*

$$Exsh(X) \subseteq Iv\left(\tilde{X}\right),$$

i si Y és una marca amb centre c i tolerància ξ, $\xi > \tilde{t}$, aleshores es compleix que $Exsh(X) \nsubseteq Iv(Y)$.

Demostració. Per definició

$$\begin{aligned} Exsh\,(X) = &\quad c * [1 + t - g - gt, 1 - t + g - gt] \\ Iv\left(\tilde{X}\right) = &\quad c * [1 + t - g\,(1 + t)\,, 1 - t + g\,(1 + t)] = \\ &\qquad\qquad = c * [1 + t - g - gt, 1 - t + g + gt]\,, \end{aligned}$$

i com que

$$\begin{aligned} 1 + t - g - gt \geq &\quad 1 + t - g - gt \\ &\text{i} \\ 1 - t + g - gt \leq &\quad 1 - t + g + gt \end{aligned}$$

es té la inclusió $Exsh\,(X) \subseteq Iv\left(\tilde{X}\right)$.

Per altra banda, si $Y = \langle c, \xi, g', n', b' \rangle$ és una marca que compleix $\xi > \tilde{t}$, resultarà

$$\begin{aligned} Exsh\,(X) = &\quad c * [1 + t - g - gt, 1 - t + g - gt] = \\ &\quad c * \left[1 + \tilde{t}, 1 - t + g - gt\right] \nsubseteq c * [1 + \xi, 1 - \xi]\,. \end{aligned}$$

Teorema 2.65 ***(Semàntica del càlcul d'una funció de marques).*** *Si*

$$f_{\mathbb{M}(t,n)} : \overbrace{\mathbb{M}\,(t, n, b) \times \cdots \times \mathbb{M}\,(t, n, b)}^{k} \longrightarrow \mathbb{M}\,(t, n, b)$$

és una funció de marques, $Z = f_{\mathbb{M}(t,n)}\,(X_1, \ldots, X_k)$ i $\tilde{Z}$ és la marca associada a l'ombra de Z, suposant que totes les marques involucrades són vàlides, es compleix que

$$U\left(z, Iv'\left(\tilde{Z}\right)\right) E\left(x_1, Iv'\,(X_1)\right) \ldots E\left(x_k, Iv'\,(X_k)\right)\; z = f\,(x_1, \ldots, x_k)\,.$$

Demostració. Comencem demostrant que per una funció f amb un sol esglaó en el seu arbre sintàctic, si $Z = f_{\mathbb{M}(t,n)}\,(X_1, X_2)$, i $\tilde{X}_1$, $\tilde{X}_2$, $\tilde{Z}$, són les marques associades a les ombres de X_1, X_2 i Z respectivament, es compleix

$$U\left(z, Iv'\left(\tilde{Z}\right)\right) E\left(x_1, Iv'\left(\tilde{X}_1\right)\right) E\left(x_2, Iv'\left(\tilde{X}_2\right)\right)\; z = f\,(x_1, x_2)\,.$$

Efectivament, representem $t - g^M_{1,2}\,(1 + t)$ per $\tilde{t}$ i considerem la inclusió següent

$$\begin{aligned} &f\,(c_1, c_2) * \left(1 \pm \tilde{t}\right) \subseteq dif\,(c_1, c_2) * \left(1 \pm \tilde{t}\right) * prop\left(1 \pm \tfrac{b-n}{2}\right) = \\ &= dif\,(c_1, c_2) * \left[\left(1 + \tilde{t}\right)\left(1 - \tfrac{b-n}{2}\right), \left(1 - \tilde{t}\right)\left(1 + \tfrac{b-n}{2}\right)\right]. \end{aligned}$$

Perquè $g_z \geq g_{1,2}^M + b^{-n}$ resulta[13] que

$$\begin{aligned}(1+\tilde{t})\left(1-\tfrac{b^{-n}}{2}\right) &\geq 1+t-g_z(1+t)\\ (1-\tilde{t})\left(1+\tfrac{b^{-n}}{2}\right) &\leq 1-t+g_z(1+t)\end{aligned}$$

i per tant,

$$f(c_1,c_2)*(1\pm\tilde{t}) \subseteq Iv\left(\tilde{Z}\right).$$

A continuació, i com a conseqüència de la inclusió

$$fR\left(Iv\left(c_1*(1\pm\tilde{t})\right), Iv\left(c_2*(1\pm\tilde{t})\right)\right) \subseteq f(c_1,c_2)*(1\pm\tilde{t}),$$

resultarà que

$$fR\left(Iv\left(c_1*(1\pm\tilde{t})\right), Iv\left(c_2*(1\pm\tilde{t})\right)\right) \subseteq Iv\left(\tilde{Z}\right),$$

i com que

$$fR\left(Iv\left(\tilde{X}_1\right), Iv\left(\tilde{X}_2\right)\right) \subseteq fR\left(Iv\left(c_1*(1\pm\tilde{t})\right), Iv\left(c_2*(1\pm\tilde{t})\right)\right),$$

tindrem

$$fR\left(Iv\left(\tilde{X}_1\right), Iv\left(\tilde{X}_2\right)\right) \subseteq Iv\left(\tilde{Z}\right),$$

que dóna lloc a la semàntica

$$U\left(z, Iv'\left(\tilde{Z}\right)\right) E\left(x_1, Iv'\left(\tilde{X}_1\right)\right) E\left(x_2, Iv'\left(\tilde{X}_2\right)\right)\ z = f(x_1,x_2).$$

Aplicant reiterativament aquest resultat, arribem a

$$U\left(z, Iv'\left(\tilde{Z}\right)\right) E\left(x_1, Iv'\left(\tilde{X}_1\right)\right) \cdots E\left(x_k, Iv'\left(\tilde{X}_k\right)\right)\ z = f(x_1,\ldots,x_k).$$

Les inclusions modals

$$Iv(X_1) \subseteq Iv\left(\tilde{X}_1\right), \cdots, Iv(X_k) \subseteq Iv\left(\tilde{X}_k\right)$$

impliquen les inclusions conjuntistes

$$Iv'\left(\tilde{X}_1\right) \subseteq Iv'(X_1), \cdots, Iv'\left(\tilde{X}_k\right) \subseteq Iv'(X_k),$$

d'on en resulta la demostració que haviem enunciat.

[13] La demostració que estem fent no és vàlida per al cas dels operadors màxim i mínim, que no comporten desplaçaments digitals. Tot i així, l'enunciat del teorema segueix sent vàlid per a aquests operadors.

Proposició 2.66 *Sota un criteri maximalista del càlcul de la granularitat, donada $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ una funció racional real contínua, en la qual tots els operadors que la formen admeten operadors de marques associats, per a les marques normalitzades $X_1, \ldots, X_k \in \mathbb{M}(t, n, b)$, si $\langle c_z, g_z \rangle = f_{\mathbb{M}(t,n)}(X_1, \ldots, X_k)$, i g_z és compatible amb αt, es compleix que*

$$\langle c_z, g_z \rangle \approx_\alpha f_{\mathbb{M}(t,\infty)}(X_1, \ldots, X_k).$$

Demostració. Considerem la funció f que té com arbre sintàctic

$$\begin{array}{ccccccc} & & & Z & & & \\ & & \nearrow & & \nwarrow & & \\ & Y1 & & & & Y_2 & \\ \nearrow & & \nwarrow & & \nearrow & & \nwarrow \\ X_1 & & X_2 & & X_3 & & X_4 \end{array}$$

perquè en un cas més general procedirem inductivament. Expressem

$$\left.\begin{array}{l} X_1 = \langle c_1, g_1 \rangle \\ X_2 = \langle c_2, g_2 \rangle \end{array}\right\} \Rightarrow Y_1 = f_{1\mathbb{M}(t,n)}(X_1, X_2) = \langle dif_1(c_1, c_2), g_{y1} \rangle$$

$$\left.\begin{array}{l} X_3 = \langle c_3, g_3 \rangle \\ X_4 = \langle c_4, g_4 \rangle \end{array}\right\} \Rightarrow Y_2 = f_{2\mathbb{M}(t,n)}(X_3, X_4) = \langle dif_2(c_3, c_4), g_{y2} \rangle$$

$$Z = \langle c_z, g_z \rangle \Rightarrow Z = f_{\mathbb{M}(t,n)}(Y_1, Y_2) = \langle dif(dif_1(c_1, c_2), dif_2(c_3, c_4)), g_z \rangle$$

es compleix

$$\begin{aligned} dif(dif_1(c_1, c_2), dif_2(c_3, c_4)) &\supseteq f(dif_1(c_1, c_2), dif_2(c_3, c_4)) * \left(1 \pm \tfrac{b^{-n}}{2}\right) \supseteq \\ &\supseteq fR\left(f_1(c_1, c_2) * \left(1 \pm \tfrac{b^{-n}}{2}\right), f_2(c_3, c_4) * \left(1 \pm \tfrac{b^{-n}}{2}\right)\right) * \left(1 \pm \tfrac{b^{-n}}{2}\right) \supseteq \\ &\supseteq fR(f_1(c_1, c_2) * (1 \pm g_{y1}), f_2(c_3, c_4) * (1 \pm g_{y2})) * \left(1 \pm \tfrac{b^{-n}}{2}\right), \end{aligned} \tag{2.9}$$

i com que apliquem un criteri maximalista en el càlcul de la granularitat, (criteri maximalista estudiat en la pàg 59), tindrem

$$\begin{aligned} fR(f_1(c_1, c_2) * (1 \pm g_{y1}), f_2(c_3, c_4) * (1 \pm g_{y2})) \supseteq \\ \supseteq f(f_1(c_1, c_2), f_2(c_3, c_4)) * (1 \pm \gamma_{y1,y2}) \end{aligned} \tag{2.10}$$

i si apliquem aquesta darrera inclusió (2.10) al resultat obtingut a 2.9 tindrem

$$\begin{aligned}
&dif\left(dif_1\left(c_1,c_2\right),dif_2\left(c_3,c_4\right)\right)\supseteq\\
&\qquad\supseteq f\left(f_1\left(c_1,c_2\right),f_2\left(c_3,c_4\right)\right)*\left(1\pm\gamma_{y1,y2}\right)*\left(1\pm\tfrac{b^{-n}}{2}\right)\supseteq\\
&\qquad\supseteq f\left(f_1\left(c_1,c_2\right),f_2\left(c_3,c_4\right)\right)*\left(1\pm g_z\right),
\end{aligned}$$

i per tant, com que $\alpha t > g_z$, resultarà

$$dif\left(dif_1\left(c_1,c_2\right),dif_2\left(c_3,c_4\right)\right)\in f\left(f_1\left(c_1,c_2\right),f_2\left(c_3,c_4\right)\right)*\left(1\pm\alpha t\right)'.$$

Capítol 3

Intervals de marques

Un cop elaborades les escales de marques, estudiades les seves propietats i construïdes les extensions de marques de les funcions racionals reals, ens proposem de donar el següent pas que consisteix en la construcció del conjunt dels intervals de marques. A partir d'aquesta construcció, aconseguim que els extrems dels nostres intervals siguin marques, és a dir, bandes de punts indiscernibles. Això ens permetrà de donar un tractament "sense" truncació a les operacions intervalars lineals que no es podia dur a terme utilitzant l'aritmètica intervalar de truncació estrictament dirigida.

El concepte d'indiscernibilitat associat a les escales de marques ens permet deixar de tractar l'abast de l'interval com a subconjunt d'$\mathbb{R}$ i passar a considerar-lo com a conjunt de marques.

3.1 Construcció del conjunt dels intervals de marques

La construcció dels intervals de marques segueix un camí paral·lel al de la construcció dels intervals modals (Vegeu [29])[1]. És per això que alguns

[1] Al llarg d'aquest capítol caldria fer constants cites a totes aquelles publicacions que han recollit la construcció i desenvolupament de la teoria dels intervals modals. Les referències haurien d'anar dirigides a l'estudi efectuat per Gardeñes, E. (Vegeu [4], [6], [5], [7] i [8]) i a les que fan un treball de recopilació, revisió i completació, com són les efectuades pel grup SIGLA/X (Vegeu [29], [30], [31], [32], [33]). D'entre ells escolliríem [29] i [30] per a aquesta primera secció i [33] per a la segona, ja que són els més complerts per a cada una de les parts, respectivament. Remarquem que es tracta d'una construcció paral·lela i que quan s'utilitzin resultats corresponents als intervals modals, ho explicitarem amb la cita corresponent.

conceptes que no es refereixen específicament a l'estructura de les marques sinó simplement l'estructura dels intervals modals es donaran per definits.

Definició 3.1 ***(Interval ordinari de marques)***
Donades les marques $\underline{A}, \overline{A} \in \mathbb{M}(t,n,b)$*, designades per* $\langle \underline{a}, g\rangle$ *i* $\langle \overline{a}, g\rangle$ *respectivament, si* $\underline{A} \leq \overline{A}$*, definim l'**interval ordinari de marques** amb extrems* $\underline{A}$ *i* $\overline{A}$*, i el representem de la forma* $\mathfrak{A}' = \left[\underline{A}, \overline{A}\right]'$ *com*

$$\mathfrak{A}' = \left[\underline{A}, \overline{A}\right]' := \\ := \left\{A \in \mathbb{M}(t,\infty,b) \mid A = \langle a, g'\rangle\,,\ a \in \mathbb{R},\ g' \in [0,1[\ \underline{A} \leq A \leq \overline{A}\right\}.$$

Observacions.

1. El valor g' és indeterminat. Això no altera la naturalesa d'aquest conjunt de valors, perquè les relacions d'igualtat entre marques no es veuen pertorbades pel valor de la granularitat que finalment només controla la validesa de les marques i de les relacions que s'hi puguin determinar.

2. La relació de pertinença $A \in \left[\underline{A}, \overline{A}\right]'$ es defineix per la condició ja implícitament descrita $\underline{A} \leq A \leq \overline{A}$. El fet que les desigualtats descrites no ho siguin en sentit dèbil és degut que els elements d'incertesa es troben en els extrems de l'interval. Aquesta decisió es pren per tal d'identificar unívocament cada interval mitjançant els seus *extrems explícits*.

3. Imposem que les marques $\underline{A}$ i $\overline{A}$ extrems de l'interval tinguin la mateixa granularitat. Per tant, en cas d'una operació constructiva caldrà fer una coerció i augmentar la menor de les granularitats per igualar-la amb la major.

Notació: El conjunt dels intervals ordinaris de marques el simbolitzem per $I(\mathbb{M}(t,n,b))$ encara que per simplificar la notació ens permetrem escriure $I(\mathbb{M})$.

Definició 3.2 ***(Conjunts de predicats sobre*** $\mathbb{M}(t,n,b)$***)***
*Definim el **conjunt de predicats sobre*** $\mathbb{M}(t,n,b)$ *i el simbolitzem per* $Pred(\mathbb{M})$*, com el conjunt de les funcions proposicionals clàssiques d'una variable sobre* $\mathbb{M}(t,n,b)$*; és a dir,*

$$Pred(\mathbb{M}) := \{P \mid P : \mathbb{M}(t,n,b) \to \{0,1\}\}.$$

Observacions.

1. De la mateixa forma que un nombre real podem identificar-lo amb el conjunt de predicats que valida: $x \leftrightarrow \{P \in \text{Pred}(\mathbb{R}) \mid P(x) = 1\}$, una marca $A \in \mathbb{M}(t, n, b)$ podem identificar-la amb el conjunt de predicats que verifica; és a dir,

$$A \leftrightarrow \{P \in \text{Pred}(\mathbb{M}) \mid P(A)\} .$$

   Donat que aquests sistemes de predicats estan definits sobre tipus de marca donats, l'estructura de Pred($\mathbb{M}$) és isomorfa a la de Pred($\mathbb{R}$). Per aquest motiu podem considerar els predicats definits sobre un conjunt de tipus compatibles (amb el mateix paràmetre de tolerància t) com funcions dels centres de les marques exclusivament. La validesa del valor de $P(A)$ serà la validesa d'A.

2. De la identificació d'un interval ordinari $X' \in I(\mathbb{R})$ amb el conjunt de les propietats que compleixen els seus punts d'alguna de les formes

$$X' \leftrightarrow \bigcup_{x,X'} \{P \in \text{Pred}(\mathbb{R}) \mid P(x) = 1\} \text{ o}$$
$$X' \leftrightarrow \bigcap_{x,X'} \{P \in \text{Pred}(\mathbb{R}) \mid P(x) = 1\} ,$$

   en podem extreure també la identificació d'un interval ordinari de marques $\mathfrak{A}' \in I(\mathbb{M})$ amb el conjunt de predicats que verifiquen les marques que hi pertanyen, segons una de les construccions

$$\mathfrak{A}' \leftrightarrow \bigcup_{A,\mathfrak{A}'} \{P \in \text{Pred}(\mathbb{M}) \mid P(A) = 1\} \text{ o}$$
$$\mathfrak{A}' \leftrightarrow \bigcap_{A,\mathfrak{A}'} \{P \in \text{Pred}(\mathbb{M}) \mid P(A) = 1\} .$$

3. La primera d'aquestes observacions no vol dir que en general els predicats $P(x)$ sobre $\mathbb{R}$ i $P(\langle x, g\rangle)$ sobre $\mathbb{M}(t)$ siguin equivalents. Sovint podria ser raonable donada una situació experimental determinada, l'equivalència entre $P(\langle x, t, g, n.b\rangle)$ i $U\left(\tilde{x}, x * (1 \pm t)'\right) P(\tilde{x})$.

Definició 3.3 ***(Intervals modals de marques)***

Direm que $\mathfrak{A}$ *és un* ***interval modal de marques*** *del tipus* $\mathbb{M}(t, n, b)$ *quan estigui constituït per una parella formada per un interval ordinari de marques, que rep el nom d'****abast*** *de l'interval modal* $\mathfrak{A}$*, i un quantificador que rep el nom de* ***modalitat*** *de l'interval modal* $\mathfrak{A}$*; és a dir*

$$\mathfrak{A} = \left((\mathfrak{A}', Q_{\mathfrak{A}}), \mathfrak{A}' \in I(\mathbb{M}), Q_{\mathfrak{A}} \in \{E, U\}\right) ,$$

on

- $\mathfrak{A}'$ *constitueix l'abast de* $(\mathfrak{A}', Q_{\mathfrak{A}})$ *i el representem per* $set(\mathfrak{A})$.
- $Q_{\mathfrak{A}}$ *constitueix la modalitat de* $(\mathfrak{A}', Q_{\mathfrak{A}})$ *i la representem per* $\mathrm{mod}\,(\mathfrak{A})$.

Notació: El conjunt dels intervals modals de marques de tipus t, n, b el simbolitzem per $I^*\,(\mathbb{M})$; això és

$$I^*\,(\mathbb{M}) := \left\{(\mathfrak{A}', Q_{\mathfrak{A}}) \mid \mathfrak{A}' \in I\,(\mathbb{M})\,, Q_{\mathfrak{A}} \in \{E, U\}\right\}.$$

Definició 3.4 ***(Quantificador modal)***
Si $\mathfrak{A} = (\mathfrak{A}', Q_{\mathfrak{A}}) \in I^*\,(\mathbb{M})$, *definim el* ***quantificador modal****, que representem per* Q, *com aquell quantificador que a cada predicat* $P \in Pred(\mathbb{M})$ *li associa un únic predicat sobre* $I^*\,(\mathbb{M})$ *mitjançant la construcció*

$$P\,(\mathfrak{A}) = Q\,(A, \mathfrak{A})\,(P\,(A))\,,$$

elaborat per la regla

$$Q\,(A, \mathfrak{A})\,(P\,(A)) = \begin{cases} E\,(A, \mathfrak{A}')\,(P\,(A)) & si\ \mathrm{mod}\,(\mathfrak{A}) = E \\ U\,(A, \mathfrak{A}')\,(P\,(A)) & si\ \mathrm{mod}\,(\mathfrak{A}) = U. \end{cases}$$

Definició 3.5 ***(Conjunt de predicats d'un interval de marques)***
Donat $\mathfrak{A} = (\mathfrak{A}', Q_{\mathfrak{A}}) \in I^*\,(\mathbb{M})$, *anomenen* ***conjunt de predicats*** *d'*$\mathfrak{A}$*, i el representem per* $Pred(\mathfrak{A})$, *al conjunt de tots els predicats* $P \in Pred(\mathbb{M})$ *acceptats per* $\mathfrak{A}$*; és a dir*

$$Pred\,(\mathfrak{A}) := \{P \in Pred\,(\mathbb{M}) \mid Q\,(A, \mathfrak{A})\,(P\,(A))\}\,.$$

Proposició 3.6 *Donat* $\mathfrak{A} = (\mathfrak{A}', Q_{\mathfrak{A}}) \in I^*\,(\mathbb{M})$ *es compleix*

1. *Si* $Q_{\mathfrak{A}} = E \Rightarrow Pred(\mathfrak{A}) = \bigcup\limits_{A, \mathfrak{A}'} \{P \in Pred\,(\mathbb{M}) \mid P\,(A) = 1\}\,.$
2. *Si* $Q_{\mathfrak{A}} = U \Rightarrow Pred(\mathfrak{A}) = \bigcap\limits_{A, \mathfrak{A}'} \{P \in Pred\,(\mathbb{M}) \mid P\,(A) = 1\}\,.$

Demostració.

1. $P \in \mathrm{Pred}(\mathfrak{A}) \Leftrightarrow$

   $E\,(A, \mathfrak{A}')\,P\,(A) \Leftrightarrow E\,(A, \mathfrak{A}')\left(P \in \left\{\hat{P} \in \mathrm{Pred}\,(\mathbb{M}) \mid \hat{P}\,(A) = 1\right\}\right) \Leftrightarrow$
   $\Leftrightarrow P \in \bigcup\limits_{A, \mathfrak{A}'} \{P \in \mathrm{Pred}\,(\mathbb{M}) \mid P\,(A) = 1\}\,.$

2. $P \in \mathrm{Pred}(\mathfrak{A}) \Leftrightarrow$
$U(A, \mathfrak{A}')\, P(A) \Leftrightarrow U(A, \mathfrak{A}') \left(P \in \left\{ \hat{P} \in \mathrm{Pred}(\mathbb{M}) \mid \hat{P}(A) = 1 \right\} \right) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \bigcap_{A, \mathfrak{A}'} \{ P \in \mathrm{Pred}(\mathbb{M}) \mid P(A) = 1 \}$.

Definició 3.7 ***(Coordenades canòniques dels intervals modals)***
Donat $\mathfrak{A} \in I^*(\mathbb{M})$, *designant* $\mathfrak{A}$ *per* $\left(\left[\underline{A}, \overline{A} \right]', Q_{\mathfrak{A}} \right)$, *anomenem*

1. *ínfim d'*$\mathfrak{A}$ *i el representem per* $\inf(\mathfrak{A})$ *a la marca*

$$\inf(\mathfrak{A}) = \begin{cases} \min \left\{ \underline{A}, \overline{A} \right\} & si\ \mathrm{mod}(\mathfrak{A}) = E \\ \max \left\{ \underline{A}, \overline{A} \right\} & si\ \mathrm{mod}(\mathfrak{A}) = U. \end{cases}$$

2. *suprem d'*$\mathfrak{A}$ *i el representem per* $\sup(\mathfrak{A})$ *a la marca*

$$\sup(\mathfrak{A}) = \begin{cases} \max \left\{ \underline{A}, \overline{A} \right\} & si\ \mathrm{mod}(\mathfrak{A}) = E \\ \min \left\{ \underline{A}, \overline{A} \right\} & si\ \mathrm{mod}(\mathfrak{A}) = U. \end{cases}$$

Observació. Si anem més enllà d'una simple notació, la definició d'ínfim i de suprem d' $\mathfrak{A}$ implica que els extrems d' $\mathfrak{A}$ tindran la mateixa granularitat, perquè els operadors mínim i màxim sobre marques prenen la major de les granularitats dels operands. De fet, aquesta implicació és irrellevant, perquè $\underline{A}$ i $\overline{A}$ com extrems d'$\mathfrak{A}$ ja han de tenir la mateixa granularitat.

Definició 3.8 ***(Notació canònica dels intervals modals)***
Donades $\underline{A}, \overline{A} \in \mathbb{M}(t, n, b)$ *dues marques amb la mateixa granularitat designades per* $\langle \underline{a}, g \rangle$ *i* $\langle \overline{a}, g \rangle$ *respectivament, direm*

$$\left[\underline{A}\,,\, \overline{A} \right] = \left[\langle \underline{a}, g \rangle, \langle \overline{a}, g \rangle \right] := \begin{cases} \left(\left[\underline{A}\,,\, \overline{A} \right]', E \right) & si\ \underline{A} \leq \overline{A} \\ \\ \left(\left[\overline{A}, \underline{A} \right]', U \right) & si\ \underline{A} \geq \overline{A} \end{cases}$$

on

$$\left[\underline{A}\,,\, \overline{A} \right]' = \left\{ \langle a, g' \rangle \in \mathbb{M}(t, n, b) \mid \min \left\{ \underline{A}, \overline{A} \right\} \leq \langle a, g' \rangle \leq \max \left\{ \underline{A}, \overline{A} \right\} \right\}.$$

Utilitzant la desigualtat material entre els extrems de l'interval, garantim la no ambigüitat de la modalitat de l'interval, llevat dels intervals puntuals.

Ens permetem d'utilitzar la següent notació auxiliar

$$\langle [\underline{a}, \overline{a}], g \rangle := [\langle \underline{a}, g \rangle, \langle \overline{a}, g \rangle].$$

Definició 3.9 ***(Immersió d'un interval real en una escala de marques)***
Donats l'interval $[\underline{a}, \overline{a}] \in I^*(\mathbb{R})$, *el tipus* $\mathbb{M}(t, \infty)$ *i una granularitat* g, *anomenem*

1. ***Immersió*** *de l'interval* $[\underline{a}, \overline{a}]$ *en l'escala de marques* $\mathbb{M}(t, \infty)$ *a l'interval de marques* $[\langle \underline{a}, g \rangle, \langle \overline{a}, g \rangle]$ *del tipus* $\mathbb{M}(t, \infty)$.

2. ***Immersió digital*** *de l'interval* $[\underline{a}, \overline{a}]$, *en referir-nos a la immersió sobre* $\mathbb{M}(t, n)$ *amb el resultat*

$$[\langle DI_n(\underline{a}), g + g_d \rangle, \langle DI_n(\overline{a}), g + g_d \rangle].$$

La immersió digital comporta un augment de la granularitat i per tant, tindrà sentit sempre que les marques $\langle DI_n(\underline{a}), g + g_d \rangle$ *i* $\langle DI_n(\overline{a}), g + g_d \rangle$ *siguin marques vàlides.*

Definició 3.10 ***(Projecció real d'un interval de marques)***
Donat l'interval de marques $\mathfrak{A}$ *designat per* $\langle [\underline{a}, \overline{a}], g \rangle$, *anomenem* ***projecció real*** *d'*$\mathfrak{A}$ *i la representem per ProjReal*($\mathfrak{A}$), *a l'interval modal* $A \in I^*(\mathbb{R})$ *definit per*

$$A = \mathit{ProjReal}(\mathfrak{A}) := [\underline{a}, \overline{a}].$$

Definició 3.11 ***(Projeccions reals externa i interna d'un interval de marques)***
Donat l'interval de marques $\mathfrak{A}$ *designat per* $\langle [\underline{a}, \overline{a}], g \rangle$, *anomenem*

1. ***Projecció real externa*** *d'*$\mathfrak{A}$ *i la representem per* $Ex(\mathfrak{A})$, *a l'interval modal definit per*

$$Ex(\mathfrak{A}) := [1 - g, 1 + g] * [\underline{a}, \overline{a}].$$

2. ***Projecció real interna*** *d'*$\mathfrak{A}$ *i la representem per* $Inn(\mathfrak{A})$, *a l'interval modal definit per*

$$Inn(\mathfrak{A}) := [1 + g, 1 - g] * [\underline{a}, \overline{a}].$$

Definició 3.12 ***(Conjunts dels intervals existencials, universals i puntuals)***
En el context dels intervals modals de marques $I^*(\mathbb{M})$, *definim els següents conjunts*

1. *Conjunt d'**intervals existencials**, que representem per* $I_e(\mathbb{M})$ *com*

$$I_e(\mathbb{M}) := \{(\mathfrak{A}', E) \mid \mathfrak{A}' \in I(\mathbb{M})\}.$$

   *Els intervals existencials de marques els anomenem també **intervals propis** de marques.*

2. *Conjunt d'**intervals universals**, que representem per* $I_u(\mathbb{M})$ *com*

$$I_u(\mathbb{M}) := \{(\mathfrak{A}', U) \mid \mathfrak{A}' \in I(\mathbb{M})\}.$$

   *Els intervals universals de marques els anomenem també **intervals impropis** de marques.*

3. *Conjunt d'**intervals puntuals**, que representem per* $I_p(\mathbb{M})$ *com*

$$I_p(\mathbb{M}) := \{[A, A] \mid A \in \mathbb{M}(t, n, b)\}.$$

Observació. A partir de les anteriors definicions i tenint en compte que

$$I^*(\mathbb{M}(t,n,b)) = \left\{\mathfrak{A} = \left[\underline{A}, \overline{A}\right] \mid \underline{A}, \overline{A} \in \mathbb{M}(t,n,b),\ \underline{A} = \langle \underline{a}, g\rangle, \overline{A} = \langle \overline{a}, g\rangle\right\},$$

podrem escriure

1. $I_e(\mathbb{M}) = \left\{\left[\underline{A}, \overline{A}\right] \in I^*(\mathbb{M}) \mid \underline{A} \leq \overline{A}\right\}.$
2. $I_u(\mathbb{M}) = \left\{\left[\underline{A}, \overline{A}\right] \in I^*(\mathbb{M}) \mid \underline{A} \geq \overline{A}\right\}.$
3. $I_p(\mathbb{M}) = \left\{\left[\underline{A}, \overline{A}\right] \in I^*(\mathbb{M}) \mid \underline{A} = \overline{A}\right\}.$

   on recordem que $\underline{A}$ i $\overline{A}$ han de tenir la mateixa granularitat.

Lema 3.13 ***(Notació canònica dels intervals de marques)***
Donat $\mathfrak{A} = \left[\underline{A}, \overline{A}\right] \in I^*(\mathbb{M})$, *es té*

- *inf*$(\mathfrak{A}) = \underline{A}$.
- *sup*$(\mathfrak{A}) = \overline{A}$.
- *set*$(\mathfrak{A}) = \left[\min\left\{\underline{A}, \overline{A}\right\}, \max\left\{\underline{A}, \overline{A}\right\}\right]'$.
- *mod*$(\mathfrak{A}) = \begin{cases} E \text{ si } \underline{A} \leq \overline{A} \\ U \text{ si } \underline{A} \geq \overline{A}. \end{cases}$

3.1.1 Relacions d'inclusió i d'igualtat

Definició 3.14 ***(Inclusió i igualtat d'intervals de marques)***
Donats $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in I^*(\mathbb{M})$ de tipus comparables, diem

1. *$\mathfrak{A}$ està **inclòs** en $\mathfrak{B}$ i ho representem per $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$ quan*
$$\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B} := Pred(\mathfrak{A}) \subseteq Pred(\mathfrak{B})\,.$$

2. *$\mathfrak{A}$ és **igual** a $\mathfrak{B}$ i ho representem per $\mathfrak{A} = \mathfrak{B}$ quan*
$$\mathfrak{A} = \mathfrak{B} := Pred(\mathfrak{A}) = Pred(\mathfrak{B})\,.$$

Proposició 3.15 ***(Inclusió)***
Donats $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in I^*(\mathbb{M})$ de tipus comparables, amb $\mathfrak{A} = (\mathfrak{A}', Q_{\mathfrak{A}})$ i $\mathfrak{B} = (\mathfrak{B}', Q_{\mathfrak{B}})$ es compleix que

$$\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B} \Leftrightarrow \begin{cases} \mathfrak{A}' \subseteq \mathfrak{B}' & si \quad Q_{\mathfrak{A}} = Q_{\mathfrak{B}} = E. \\ \mathfrak{A}' \supseteq \mathfrak{B}' & si \quad Q_{\mathfrak{A}} = Q_{\mathfrak{B}} = U. \\ \mathfrak{A}' \cap \mathfrak{B}' \neq \emptyset & si \quad Q_{\mathfrak{A}} = U, Q_{\mathfrak{B}} = E. \\ \mathfrak{A}' = \mathfrak{B}' = [A, A] & si \quad Q_{\mathfrak{A}} = E, Q_{\mathfrak{B}} = U. \end{cases}$$

Demostració.

1. $\mathfrak{A} = (\mathfrak{A}', E)$ i $\mathfrak{B} = (\mathfrak{B}', E)$.
   $\Rightarrow)$ $\mathfrak{A}' \not\subseteq \mathfrak{B}' \Leftrightarrow$
   $\Leftrightarrow E\,(A, \mathfrak{A}')\,(A \notin \mathfrak{B}') \Rightarrow (X = A) \in \text{Pred}(\mathfrak{A})$ i $(X = A) \notin \text{Pred}(\mathfrak{B}) \Leftrightarrow$
   $\Leftrightarrow \text{Pred}(\mathfrak{A}) \not\subseteq \text{Pred}(\mathfrak{B})$.
   $\Leftarrow)$ Sigui $P \in \text{Pred}(\mathfrak{A}) \Leftrightarrow E\,(A, \mathfrak{A}')\,P\,(A) \Rightarrow E\,(A, \mathfrak{B}')\,P\,(A) \Leftrightarrow$
   $\Leftrightarrow P \in \text{Pred}(\mathfrak{B}', E)$.

2. $\mathfrak{A} = (\mathfrak{A}', U)$ i $\mathfrak{B} = (\mathfrak{B}', U)$.
   $\Rightarrow)$ $\mathfrak{B}' \not\subseteq \mathfrak{A}' \Leftrightarrow$
   $\Leftrightarrow E\,(B, \mathfrak{B}')\,(B \notin \mathfrak{A}') \Rightarrow (X \in \mathfrak{A}') \in \text{Pred}(\mathfrak{A})$ i $(X \in \mathfrak{A}) \notin \text{Pred}(\mathfrak{B}) \Leftrightarrow$
   $\Leftrightarrow \text{Pred}(\mathfrak{A}) \not\subseteq \text{Pred}(\mathfrak{B})$.
   $\Leftarrow)$ Sigui $P \in \text{Pred}(\mathfrak{A}) \Leftrightarrow U\,(A, \mathfrak{A}')\,P\,(A) \Rightarrow U\,(A, \mathfrak{B}')\,P\,(A) \Leftrightarrow$
   $\Leftrightarrow P \in \text{Pred}(\mathfrak{B})$.

3. $\mathfrak{A} = (\mathfrak{A}', U)$ i $\mathfrak{B} = (\mathfrak{B}', E)$

   $\Rightarrow)$ $(X \in \mathfrak{A}') \in \mathrm{Pred}(\mathfrak{A}) \Rightarrow (X \in \mathfrak{A}') \in \mathrm{Pred}(\mathfrak{B}) \Leftrightarrow$

   $E(B, \mathfrak{B}')(B \in \mathfrak{A}') \Leftrightarrow \mathfrak{A}' \cap \mathfrak{B}' \neq \emptyset$

   $\Leftarrow)$ Si $P \in \mathrm{Pred}(\mathfrak{A}) \Rightarrow U(A, \mathfrak{A}')\, P(A) \Rightarrow E(A, \mathfrak{B}')\, P(A) \Rightarrow P \in \mathrm{Pred}(\mathfrak{B})$

4. $\mathfrak{A} = (\mathfrak{A}', E)$ i $\mathfrak{B} = (\mathfrak{B}', U)$.

   $\Rightarrow)$ Sigui $A \in \mathfrak{A}'$.

   $(X = A) \in \mathrm{Pred}(\mathfrak{A}) \Rightarrow (X = A) \in \mathrm{Pred}(\mathfrak{B}) \Leftrightarrow U(B, \mathfrak{B}')(B = A)$.

   D'existir un $A_1 \in \mathfrak{A}'$ resultaria

   $U(B, \mathfrak{B}')(B = A, B = A_1)$, d'on $A_1 = A$.

   $\Leftarrow)$ Trivialment.

Proposició 3.16 ***(Propietats d'ordre de la relació $\subseteq$)***
Donats $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C} \in I^*(\mathbb{M})$ de tipus comparables, es compleix que

1. $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{A}$.
2. $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}, \mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{A} \Rightarrow \mathfrak{A} = \mathfrak{B}$.
3. $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}, \mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{C} \Rightarrow \mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{C}$.

Demostració. A partir de les propietats de la relació d'inclusió conjuntista dels conjunts de predicats.

Corol·lari 3.17 *Utilitzant l'anterior proposició 3.15, es dedueix que donats els intervals de marques $\mathfrak{A} = \left[\underline{A}, \overline{A}\right]$, $\mathfrak{B} = \left[\underline{B}, \overline{B}\right] \in I^*(\mathbb{M})$ de tipus comparables,*

1. $\left(\left[\underline{A}, \overline{A}\right] \subseteq \left[\underline{B}, \overline{B}\right]\right) \Leftrightarrow \left(\underline{A} \geq \underline{B}, \overline{A} \leq \overline{B}\right)$.
2. $\left(\left[\underline{A}, \overline{A}\right] = \left[\underline{B}, \overline{B}\right]\right) \Leftrightarrow \left(\underline{A} = \underline{B}, \overline{A} = \overline{B}\right)$.

Definició 3.18 ***(Inclusió i igualtat dèbil d'intervals de marques)***
Donats els intervals de marques $\mathfrak{A} \in I^*(\mathbb{M}(t, n_1, b))$, $\mathfrak{B} \in I^*(\mathbb{M}(t, n_2, b))$, $\mathfrak{C} \in I^*(\mathbb{M}(t, n_3, b))$ tals que les seves granularitats g_a, g_b i g_c respectivament són compatibles amb αt, direm

1. *$\mathfrak{A}$ està **dèbilment inclòs** en $\mathfrak{B}$ respecte del paràmetre α ($\mathfrak{B}$ inclou dèbilment a $\mathfrak{A}$ respecte del paràmetre α) i ho representem per $\mathfrak{A} \subseteq_\alpha \mathfrak{B}$, quan*

$$\underline{A} \succeq_\alpha \underline{B}, \overline{A} \preceq_\alpha \overline{B}.$$

2. *$\mathfrak{A}$ és* ***dèbilment igual*** *a $\mathfrak{B}$ respecte del paràmetre α i ho representem per $\mathfrak{A} \approx_\alpha \mathfrak{B}$, quan*

$$\underline{A} \approx_\alpha \underline{B}, \overline{A} \approx_\alpha \overline{B}.$$

Observació. A partir de les propietats de les relacions de desigualtat dèbil entre marques (Vegeu capítol anterior, pàg 49 i següents), es dedueix que la inclusió dèbil d'intervals de marques compleix, sempre que les respectives granularitats siguin compatibles amb $\alpha t, \beta t$ o $(\alpha + \beta)\, t$, segons sigui necessari, les propietats següents:

- Reflexiva: $\mathfrak{A} \subseteq_\alpha \mathfrak{A}$.
- Antisimètrica: $\mathfrak{A} \subseteq_\alpha \mathfrak{B},\ \mathfrak{B} \subseteq_\alpha \mathfrak{A} \Leftrightarrow \mathfrak{A} \approx_\alpha \mathfrak{B}$.
- $(\alpha + \beta)$-transitiva: $\mathfrak{A} \subseteq_\alpha \mathfrak{B},\ \mathfrak{B} \subseteq_\beta \mathfrak{C} \Rightarrow \mathfrak{A} \subseteq_{\alpha+\beta} \mathfrak{C}$. (d'on es dedueix la 2α-transitivitat: $\mathfrak{A} \subseteq_\alpha \mathfrak{B},\ \mathfrak{B} \subseteq_\alpha \mathfrak{C} \Rightarrow \mathfrak{A} \subseteq_{2\alpha} \mathfrak{C}$), suposant la compatibilitat de les granularitats amb $\alpha t, \beta t, (\alpha + \beta)\, t, 2\alpha t$, segons sigui necessari.

Anàlogament, a partir de les propietats de la igualtat dèbil entre marques, es dedueixen les propietats de la relació d'igualtat dèbil entre intervals de marques:

- Reflexiva: $\mathfrak{A} \approx_\alpha \mathfrak{A}$.
- Antisimètrica: $\mathfrak{A} \approx_\alpha \mathfrak{B} \Leftrightarrow \mathfrak{B} \approx_\alpha \mathfrak{A}$.
- $(\alpha + \beta)$-transitiva: $\mathfrak{A} \approx_\alpha \mathfrak{B},\ \mathfrak{B} \approx_\beta \mathfrak{C} \Rightarrow \mathfrak{A} \approx_{\alpha+\beta} \mathfrak{C}$, suposant la compatibilitat de les granularitats amb $\alpha t, \beta t, (\alpha + \beta)\, t$, segons sigui necessari.

Proposició 3.19 *Donats els intervals de marques $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C} \in I^* (\mathbb{M})$ de tipus comparables, tals que les seves granularitats g_a, g_b i g_c respectivament són compatibles amb αt, es compleix que*

1. $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B} \Rightarrow \mathfrak{A} \subseteq_\alpha \mathfrak{B}$.
2. $\mathfrak{A} = \mathfrak{B} \Rightarrow \mathfrak{A} \approx_\alpha \mathfrak{B}$.
3. $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B},\ \mathfrak{B} \subseteq_\alpha \mathfrak{C} \Rightarrow \mathfrak{A} \subseteq_\alpha \mathfrak{C}$.
4. $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B},\ \mathfrak{B} \approx_\alpha \mathfrak{C} \Rightarrow \mathfrak{A} \subseteq_\alpha \mathfrak{C}$.

Demostració. A partir de les propietats de les desigualtats i de les igualtats dèbils respecte del paràmetre α estudiades en el capítol anterior (Vegeu capítol anterior pàg 45 i següents).

Proposició 3.20 *Donats* $\mathfrak{A}' \in I(\mathbb{M}(t,n_1,b))$, $\mathfrak{B}' \in I(\mathbb{M}(t,n_2,b))$ *intervals ordinaris de marques tals que les seves granularitats* g_a *i* g_b *són compatibles amb* αt*, es compleix que*

$$\mathfrak{A}' \subseteq_\alpha \mathfrak{B}' \Leftrightarrow U(A,\mathfrak{A}')\,E(B,\mathfrak{B}')\,(A \approx_\alpha B).$$

Demostració. Escrivim $\mathfrak{A}' = \left\langle \left[\underline{A},\overline{A}\right], g_a \right\rangle$ i $\mathfrak{B}' = \left\langle \left[\underline{B},\overline{B}\right], g_b \right\rangle$.

$\Leftarrow$)

Prenem $\underline{A} \in \mathfrak{A}'$. Sabem $E(B_1,\mathfrak{B}')\ \underline{A} \approx_\alpha B_1$.

Per definició d'interval de marques es té $\underline{B} \leq B_1 \leq \overline{B}$.

Utilitzant la propietat estudiada en el capítol anterior (pàg 49, proposició 2.25) obtenim

$$\underline{A} \approx_\alpha B_1 \geq \underline{B} \Rightarrow \underline{A} \succeq_\alpha \underline{B}.$$

Repetint aquest raonament per $\overline{A} \in \mathfrak{A}'$ arribem a $\overline{A} \preceq_\alpha \overline{B}$.

$\Rightarrow$)

Si $\underline{A} = \langle \underline{a}, g_a\rangle$, $\overline{A} = \langle \overline{a}, g_a\rangle$, $\underline{B} = \langle \underline{b}, g_b\rangle$, $\overline{B} = \left\langle \overline{b}, g_b\right\rangle$, i prenem $A \in \mathfrak{A}'$, tindrem $A = \langle a, \tilde{g}\rangle$ amb $\underline{a} \leq a \leq \overline{a}$.

En verificar-se la inclusió $\mathfrak{A}' \subseteq_\alpha \mathfrak{B}'$, poden donar-se les situacions següents:

1. $(\underline{a} > \underline{b})\ \underline{and}\ \left(\overline{a} < \overline{b}\right)$.
2. $(\underline{a} > \underline{b})\ \underline{and}\ \left(\overline{a} \in ind\left\langle \overline{b}, g_b, \alpha t, n, b\right\rangle\ \underline{or}\ \overline{b} \in ind\langle \overline{a}, g_a, \alpha t, n, b\rangle\right)$.
3. $(\underline{a} \in ind\langle \underline{b}, g_b, \alpha t, n, b\rangle\ \underline{or}\ \underline{b} \in ind\langle \underline{a}, g_a, \alpha t, n, b\rangle)\ \underline{and}\ \left(\overline{a} < \overline{b}\right)$.
4. $(\underline{a} \in ind\langle \underline{b}, g_b, \alpha t, n, b\rangle\ \underline{or}\ \underline{b} \in ind\langle \underline{a}, g_a, \alpha t, n, b\rangle)\ \underline{and}$ $\left(\overline{a} \in ind\left\langle \overline{b}, g_b, \alpha t, n, b\right\rangle\ \underline{or}\ \overline{b} \in ind\langle \overline{a}, g_a, \alpha t, n, b\rangle\right)$.

Analitzant cada una d'aquestes situacions ens trobem que

1. Podem prendre $B = \langle a, g\rangle$. Es compleix $\begin{cases} B \in \mathfrak{B}' \text{ ja que } a \in \left[\underline{b},\overline{b}\right]' \\ B \approx_\alpha A. \end{cases}$

2. Podem suposar $\overline{a} \geq \overline{b}$ ja que en cas contrari estaríem en la situació anterior.

   D'aquesta forma hem de considerar

   - $a \in \left[\underline{a},\overline{b}\right]$ (Situació ja contemplada en el cas anterior).

- $a \in \left[\overline{b}, \overline{a}\right]$ (Situació que ens permet prendre $B = \left\langle \overline{b}, g \right\rangle$, ja que en aquest cas

i Si $\overline{a} \in ind \left\langle \overline{b}, g_b, \alpha t, n, b \right\rangle$ es té

$$\overline{b} \leq a \leq \overline{a} \leq \max \left\{ \overline{b}\,(1 + \alpha t)\,, \overline{b}\,(1 - \alpha t) \right\}$$

i per tant, $a \in ind \left\langle \overline{b}, g_b, \alpha t, n, b \right\rangle$.

ii Si $\overline{b} \in ind \left\langle \overline{a}, g_a, \alpha t, n, b \right\rangle$ es té $\min \left\{ \overline{a}\,(1 - \alpha t)\,, \overline{a}\,(1 + \alpha t) \right\} \leq \overline{b} \leq \overline{a}$.
i com que $\overline{b} \leq a \leq \overline{a}$, resultarà $a\,(1 - \alpha t) \leq \overline{a}\,(1 - \alpha t)$ i $a\,(1 + \alpha t) \leq \overline{a}\,(1 + \alpha t)$ d'on $\min \left\{ a\,(1 - \alpha t)\,, a\,(1 + \alpha t) \right\} \leq \min \left\{ \overline{a}\,(1 - \alpha t)\,, \overline{a}\,(1 + \alpha t) \right\}$ i per tant,

$$\min \left\{ a\,(1 - \alpha t)\,, a\,(1 + \alpha t) \right\} \leq \overline{b} \leq a,$$

deduint, per tant, $\overline{b} \in ind_\alpha\,(A)$ i conseqüentment $\overline{B} \approx_\alpha A$.

3. Anàleg a 2.

4. Combinant les possibilitats contemplades en 2 i en 3.

Proposició 3.21 *Donats els intervals de marques* $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C} \in I^*(\mathbb{M})$, *de tipus comparables i tals que* g_a *i* b_b *són compatibles amb* αt, *es compleix*

1. $\mathfrak{A}$ *i* $\mathfrak{B}$ *propis:* $\mathfrak{A} \subseteq_\alpha \mathfrak{B} \Leftrightarrow U\,(A, \mathfrak{A}')\, E\,(B, \mathfrak{B}')\ A \approx_\alpha B$.
2. $\mathfrak{A}$ *i* $\mathfrak{B}$ *impropis:* $\mathfrak{A} \subseteq_\alpha \mathfrak{B} \Leftrightarrow U\,(B, \mathfrak{B}')\, E\,(A, \mathfrak{A}')\ B \approx_\alpha A$.
3. $\mathfrak{A}$ *impropi i* $\mathfrak{B}$ *propi:* $\mathfrak{A} \subseteq_\alpha \mathfrak{B} \Leftrightarrow E\,(A, \mathfrak{A}')\, E\,(B, \mathfrak{B}')\ A \approx_\alpha B$.
4. $\mathfrak{A}$ *propi i* $\mathfrak{B}$ *impropi:* $\mathfrak{A} \subseteq_\alpha \mathfrak{B} \Leftrightarrow U\,(A, \mathfrak{A}')\, U\,(B, \mathfrak{B}')\ A \approx_\alpha B$.

Demostració. Prenem $\mathfrak{A} = \left[\underline{A}, \overline{A}\right]$ i $\mathfrak{B} = \left[\underline{B}, \overline{B}\right]$.

Per definició, $\mathfrak{A} \subseteq_\alpha \mathfrak{B} := \underline{A} \succeq_\alpha \underline{B}$ i $\overline{A} \preceq_\alpha \overline{B}$.

1. Si $\mathfrak{A}$ i $\mathfrak{B}$ són propis, apliquem directament l'anterior proposició 3.20

2. Si $\mathfrak{A}$ i $\mathfrak{B}$ són impropis i $\mathfrak{A} \subseteq_\alpha \mathfrak{B}$, tindrem $\mathfrak{A}' = \left[\overline{A}, \underline{A}\right]$ i $\mathfrak{B}' = \left[\overline{B}, \underline{B}\right]$. $\overline{B} \succeq_\alpha \overline{A}$ i $\underline{B} \preceq_\alpha \underline{A}$. Caldrà només aplicar el resultat de la proposició 3.20 a la inclusió $\mathfrak{B}' \subseteq_\alpha \mathfrak{A}'$.

3. Si $\mathfrak{A}$ és impropi i $\mathfrak{B}$ és propi, estudiem les dues implicacions:

$\Rightarrow$ Les desigualtats $\underline{A} \succeq_\alpha \underline{B}$ i $\overline{A} \preceq_\alpha \overline{B}$ ens permeten fer la distinció dels casos següents

- $\underline{a} \geq \underline{b}$ i $\overline{a} \leq \overline{b}$ (essent $\underline{a}, \overline{a}, \underline{b}, \overline{b}$ els centres de les marques $\underline{A}, \overline{A}, \underline{B}, \overline{B}$ respectivament).

  En aquest cas ProjReal($\mathfrak{A}$) $\subseteq$ProjReal($\mathfrak{B}$) fet que ens permet afirmar

$$E\left(a, \text{ProjReal}\left(\mathfrak{A}\right)\right) E\left(b, \text{ProjReal}\left(\mathfrak{B}\right)\right)\ a = b.$$

  Les marques $\langle a, g\rangle$ i $\langle b, g\rangle$ compliran la igualtat dèbil desitjada.

- $\underline{a} \geq \underline{b}$ i $\overline{A} \approx_\alpha \overline{B}$. Podem prendre $A = \overline{A}$ i $B = \overline{B}$ complint-se $A \approx_\alpha B$.
- Els dos casos restants es tracten de forma anàloga a l'anterior.

$\Leftarrow$ Siguin $A \in \mathfrak{A}'$ i $B \in \mathfrak{B}'$ les marques que existeixen i compleixen $A \approx_\alpha B$.

Tindrem, per tant, $\overline{A} \leq A \leq \underline{A}$ i $\underline{B} \leq B \leq \overline{B}$, d'on es dedueix

$$\begin{array}{c} \underline{B} \leq B \approx_\alpha A \leq \underline{A} \Rightarrow \underline{B} \preceq_\alpha \underline{A} \\ \overline{A} \leq A \approx_\alpha B \leq \overline{B} \Rightarrow \overline{A} \preceq_\alpha \overline{B}. \end{array}$$

4. Si $\mathfrak{A}$ és propi i $\mathfrak{B}$ és impropi tindrem:

$\Rightarrow$ Siguin $A \in \mathfrak{A}'$ i $B \in \mathfrak{B}'$. Es complirà

$$\begin{array}{c} \underline{A} \leq A \leq \overline{A} \preceq_\alpha \overline{B} \leq B \Rightarrow A \preceq_\alpha B \\ \overline{B} \leq B \leq \underline{B} \preceq_\alpha \underline{A} \leq A \Rightarrow B \preceq_\alpha A, \end{array}$$

i per tant,

$$A \approx_\alpha B.$$

3.1.2 Relacions de desigualtat

Definició 3.22 ***(Relacions de desigualtat no estricta material)*** *Donats* $\mathfrak{A} = \left[\underline{A}, \overline{A}\right], \mathfrak{B} = \left[\underline{B}, \overline{B}\right] \in I^*(\mathbb{M})$ *de tipus comparables, diem*

1. $\mathfrak{A}$ *és* ***menor o igual*** *que* $\mathfrak{B}$ *i ho representem per* $\mathfrak{A} \leq \mathfrak{B}$ *quan*

$$\mathfrak{A} \leq \mathfrak{B} := \left(\underline{A} \leq \underline{B}, \overline{A} \leq \overline{B}\right).$$

2. $\mathfrak{A}$ *és* ***major o igual que*** $\mathfrak{B}$ *i ho representem per* $\mathfrak{A} \geq \mathfrak{B}$ *quan*

$$\mathfrak{A} \geq \mathfrak{B} := \mathfrak{B} \leq \mathfrak{A}.$$

Definició 3.23 ***(Relacions de desigualtat dèbil)***
Donats els intervals de marques $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in I^*(\mathbb{M})$ *de tipus comparables, si* $\alpha \in]0,1]$ *i* g_a, g_b *són compatibles amb* αt, *diem*

1. $\mathfrak{A}$ *és* ***dèbilment menor o igual*** *que* $\mathfrak{B}$ *respecte del paràmetre* α, *i ho representem per* $\mathfrak{A} \preceq_\alpha \mathfrak{B}$ *quan*

$$\mathfrak{A} \preceq_\alpha \mathfrak{B} := \left(\underline{A} \preceq_\alpha \underline{B}, \overline{A} \preceq_\alpha \overline{B}\right).$$

2. $\mathfrak{A}$ *es* ***dèbilment major o igual que*** $\mathfrak{B}$ *respecte del paràmetre* α, *i ho representem per* $\mathfrak{A} \succeq_\alpha \mathfrak{B}$ *quan*

$$\mathfrak{A} \succeq_\alpha \mathfrak{B} := \mathfrak{B} \preceq_\alpha \mathfrak{A}.$$

Proposició 3.24 ***(Propietats d'ordre de la relació*** $\leq$***)***
Donats $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C} \in I^*(\mathbb{M})$ *es compleix*

1. $\mathfrak{A} \leq \mathfrak{A}$.
2. $\mathfrak{A} \leq \mathfrak{B}, \mathfrak{B} \leq \mathfrak{A} \Rightarrow \mathfrak{A} = \mathfrak{B}$.
3. $\mathfrak{A} \leq \mathfrak{B}, \mathfrak{B} \leq \mathfrak{C} \Rightarrow \mathfrak{A} \leq \mathfrak{C}$.

Demostració. A partir de l'estudi de la relació menor o igual entre marques (Capítol anterior, pàg 47 i següents).

Proposició 3.25 ***(Propietats de les desigualtats dèbils)***
Donats els intervals de marques $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C} \in I^*(\mathbb{M})$ *tals que les seves granularitats són compatibles amb* $\alpha t, \beta t$ *o* $(\alpha+\beta)\, t$, *segons sigui necessari, es compleix que*

1. $\mathfrak{A} \preceq_\alpha \mathfrak{A}$.
2. $\mathfrak{A} \preceq_\alpha \mathfrak{B},\ \mathfrak{B} \preceq_\alpha \mathfrak{A} \Leftrightarrow \mathfrak{A} \approx_\alpha \mathfrak{B}$.
3. $\mathfrak{A} \preceq_\alpha \mathfrak{B},\ \mathfrak{B} \preceq_\beta \mathfrak{C} \Rightarrow \mathfrak{A} \preceq_{\alpha+\beta} \mathfrak{C}$.

Demostració. A partir de les propietats de les desigualtats dèbils entre marques. (Capítol anterior, pàg 49 i següents).

Proposició 3.26 ***(Altres propietats de les relacions de desigualtat)***
Donats els intervals de marques $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C} \in I^*(\mathbb{M})$ *tals que les seves granularitats són compatibles amb* αt, *es compleix:*

1. $\mathfrak{A} \leq \mathfrak{B} \Rightarrow U(\alpha,]0,1]) \ \mathfrak{A} \preceq_\alpha \mathfrak{B}$.

2. $\mathfrak{A} \approx_\alpha \mathfrak{B}, \ \mathfrak{B} \leq \mathfrak{C} \Rightarrow \mathfrak{A} \preceq_\alpha \mathfrak{C}$.

Demostració. A partir de les propietats de les desigualtats dèbils entre marques. (Capítol anterior, proposicions 2.25 i 2.26).

3.1.3 Dualitat

Definició 3.27 ***(Copredicats d'un interval)***
Donat $\mathfrak{A} = (\mathfrak{A}', Q_\mathfrak{A}) \in I^*(\mathbb{M})$, definim el conjunt de ***copredicats*** *d'$\mathfrak{A}$ i el representem per $Copred(\mathfrak{A})$, com el conjunt de tots els predicats $P \in Pred(\mathbb{M})$ rebutjats per $\mathfrak{A}$; és a dir*

$$Copred(\mathfrak{A}) := \{P \in Pred(\mathbb{M}) \mid \neg Q(A, \mathfrak{A})(P(A))\}.$$

Observació. Si $\mathfrak{A} \in I^*(\mathbb{M})$, es pot definir el conjunt de copredicats d'$\mathfrak{A}$ com

$$\mathrm{Copred}(\mathfrak{A}) := \mathrm{Pred}(\mathbb{M}) - \mathrm{Pred}(\mathfrak{A}).$$

Definició 3.28 ***(Operador dual)***
*Donat $\mathfrak{A} = (\mathfrak{A}', Q_\mathfrak{A}) \in I^*(\mathbb{M})$ un interval modal de marques, definim sobre $\mathfrak{A}$ l'**operador dual**, que representem per $dual(\mathfrak{A})$ com*

$$dual(\mathfrak{A}) = dual(\mathfrak{A}', Q_\mathfrak{A}) := (\mathfrak{A}', dual(Q_\mathfrak{A})),$$

essent $dual(Q_\mathfrak{A}) = \begin{cases} U \ si \ Q_\mathfrak{A} = E \\ E \ si \ Q_\mathfrak{A} = U. \end{cases}$

Utilitzant coordenades canòniques,

$$\mathfrak{A} = \left\langle \left[\underline{A}, \overline{A}\right] \right\rangle \Leftrightarrow dual(\mathfrak{A}) = \left\langle dual\left(\left[\underline{A}, \overline{A}\right]\right) \right\rangle.$$

Lema 3.29 *Si $\mathfrak{A} \in I^*(\mathbb{M})$, es compleix*

$$P \in Copred(\mathfrak{A}) \Leftrightarrow (\neg P) \in Pred(dual(\mathfrak{A})).$$

Demostració.

$$\begin{aligned} P \in \mathrm{Copred}(\mathfrak{A}) \Leftrightarrow & \quad \neg Q(A, \mathfrak{A})(P(A)) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (\neg Q)(A, \mathfrak{A})(\neg P(A)) \Leftrightarrow & \quad (\neg P) \in \mathrm{Pred}(\mathrm{dual}(\mathfrak{A})). \end{aligned}$$

Lema 3.30 *Donats $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in I^*(\mathbb{M})$ amb granularitats g_a i g_b respectivament, si g_a i g_b són compatibles amb αt, es compleix:*

1. $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B} \Leftrightarrow dual(\mathfrak{A}) \supseteq dual(\mathfrak{B})$.

2. $\mathfrak{A} \subseteq_\alpha \mathfrak{B} \Leftrightarrow dual(\mathfrak{A}) \supseteq_\alpha dual(\mathfrak{B})$.

3. $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B} \Leftrightarrow Copred(\mathfrak{A}) \supseteq Copred(\mathfrak{B})$.

Demostració.

1. A partir de l'expressió donada per la inclusió en el corol·lari 3.17.

2. Utilitzant la definició donada en 3.18.

3. $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B} \Leftrightarrow \mathrm{Pred}(\mathfrak{A}) \subseteq \mathrm{Pred}(\mathfrak{B}) \Leftrightarrow \mathrm{Copred}(\mathfrak{A}) \supseteq \mathrm{Copred}(\mathfrak{B})$.

3.1.4 Reticles intervalars

Definició 3.31 ***(Operadors*** min ***i*** max ***a*** $(I^*(\mathbb{M}), \leq)$***)***

Donada la família finita $(\mathfrak{A}_i)_{i,I}$ *d'intervals de marques en què* $U(i, I)$ $\mathfrak{A}_i = \langle [\underline{a}_i, \overline{a}_i], g_i \rangle \in I^*(\mathbb{M}(t, n, b))$, *si* $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in I^*(\mathbb{M}(t, n, b))$, *diem*

1. $\min\limits_{i,I}(\mathfrak{A}_i) = \mathfrak{A} = \langle [\underline{a}, \overline{a}], g_a \rangle$, *si*

$$\begin{cases} \mathfrak{X} \in I^*(\mathbb{M}(t, n, b))\, U(i, I)\, \mathfrak{X} \leq \mathfrak{A}_i \Leftrightarrow \mathfrak{X} \leq \mathfrak{A}. \\ g_a = \max\limits_{i,I}\{g_i\}. \end{cases}$$

2. $\max\limits_{i,I}(\mathfrak{A}_i) = \mathfrak{B} = \left\langle \left[\underline{b}, \overline{b}\right], g_b \right\rangle$, *si*

$$\begin{cases} \mathfrak{X} \in I^*(\mathbb{M}(t, n, b))\, U(i, I)\, \mathfrak{X} \geq \mathfrak{A}_i \Leftrightarrow \mathfrak{X} \geq \mathfrak{B}. \\ g_b = \max\limits_{i,I}\{g_i\} \end{cases}$$

Proposició 3.32 ***(Reticle*** $(I^*(\mathbb{M}), \leq)$***)***

Donada la família finita $(\mathfrak{A}_i)_{i,I}$ *d'intervals de marques en què* $U(i, I)$ $\mathfrak{A}_i = \left[\underline{A}_i, \overline{A}_i\right] \in I^*(\mathbb{M}(t, n, b))$, *es compleix que*

1. $\min\limits_{i,I}(\mathfrak{A}_i) = \left[\min\limits_{i,I}(\underline{A}_i), \min\limits_{i,I}\left(\overline{A}_i\right)\right]$.

2. $\max\limits_{i,I}(\mathfrak{A}_i) = \left[\max\limits_{i,I}(\underline{A}_i), \max\limits_{i,I}\left(\overline{A}_i\right)\right]$.

Demostració. A partir de les definicions 3.31 i 3.22.

Definició 3.33 ***(Operadors meet*** $(\wedge)$ ***i join*** $(\vee)$ ***a*** $(I^*(\mathbb{M}), \subseteq)$***)***

Donada la família finita $(\mathfrak{A}_i)_{i,I}$ *d'intervals de marques en què* $U(i,I)$ $\mathfrak{A}_i = \langle [\underline{a}_i, \overline{a}_i], g_i\rangle \in I^*(\mathbb{M}(t,n,b))$, *si* $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in I^*(\mathbb{M}(t,n,b))$ *diem*

1. $\bigwedge\limits_{i,I} \mathfrak{A}_i = \mathfrak{A} = \langle [\underline{a}, \overline{a}], g_a\rangle$, *si*

$$\begin{cases} \mathfrak{X} \in I^*(\mathbb{M}(t,n,b))\, U(i,I)\, \mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{A}_i \Leftrightarrow \mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{A}. \\ g_a = \max\limits_{i,I} \{g_i\}. \end{cases}$$

2. $\bigvee\limits_{i,I} \mathfrak{A}_i = \mathfrak{B} = \left\langle \left[\underline{b}, \overline{b}\right], g_b\right\rangle$, *si*

$$\begin{cases} \mathfrak{X} \in I^*(\mathbb{M}(t,n,b))\, U(i,I)\, \mathfrak{X} \supseteq \mathfrak{A}_i \Leftrightarrow \mathfrak{X} \supseteq \mathfrak{B}. \\ g_b = \max\limits_{i,I} \{g_i\}. \end{cases}$$

Proposició 3.34 ***(Reticle*** $(I^*(\mathbb{M}), \subseteq)$***)***

Donada la família finita $(\mathfrak{A}_i)_{i,I}$ *d'intervals de marques en què* $U(i,I)$ $\mathfrak{A}_i = \left[\underline{A}_i, \overline{A}_i\right] \in I^*(\mathbb{M}(t,n,b))$, *es compleix*

1. $\bigwedge\limits_{i,I} \mathfrak{A}_i = \left[\max\limits_{i,I}(\underline{A}_i), \min\limits_{i,I}\left(\overline{A}_i\right)\right]$.

2. $\bigvee\limits_{i,I} \mathfrak{A}_i = \left[\min\limits_{i,I}(\underline{A}_i), \max\limits_{i,I}\left(\overline{A}_i\right)\right]$.

Demostració. A partir de la definició 3.33 i del corol·lari 3.17.

Definició 3.35 ***(Operador meet-join)***

Si $\mathfrak{A} \in I^*(\mathbb{M})$, *definim l'****operador meet-join*** *aplicat a* $\mathfrak{A}$ *i el representem per* $\underset{A,\mathfrak{A}}{\Omega}$ *com*

1. $\underset{A,\mathfrak{A}}{\Omega} := \bigwedge\limits_{A,\mathfrak{A}'} \left[\underline{A}, \overline{A}\right]$ *si* $\mathfrak{A}$ *és impropi.*

2. $\underset{A,\mathfrak{A}}{\Omega} := \bigvee\limits_{A,\mathfrak{A}'} \left[\underline{A}, \overline{A}\right]$ *si* $\mathfrak{A}$ *és propi.*

Proposició 3.36 *Donat* $\mathfrak{A} \in I^*(\mathbb{M})$, *es compleix que*

$$\mathfrak{A} = \underset{A,\mathfrak{A}'}{\Omega} [A, A].$$

Demostració.

1. $\bigwedge_{A,\mathfrak{A}'} [A, A] = \left[\max_{A,\mathfrak{A}'} A, \min_{A,\mathfrak{A}'} A\right] = \mathfrak{A}$ si $\mathfrak{A} \in I_u(\mathbb{M})$.

2. $\bigvee_{A,\mathfrak{A}'} [A, A] = \left[\min_{A,\mathfrak{A}'} A, \max_{A,\mathfrak{A}'} A\right] = \mathfrak{A}$ si $\mathfrak{A} \in I_e(\mathbb{M})$.

Proposició 3.37 *Donats* $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in I^*(\mathbb{M})$, *es compleix*

1. *Pred*$(\mathfrak{A} \wedge \mathfrak{B}) \subseteq$ *Pred*$(\mathfrak{A}) \cap$ *Pred*$(\mathfrak{B})$.
2. *Pred*$(\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}) \supseteq$ *Pred*$(\mathfrak{A}) \cup$ *Pred*$(\mathfrak{B})$.
3. *Copred*$(\mathfrak{A} \wedge \mathfrak{B}) \supseteq$ *Copred*$(\mathfrak{A}) \cup$ *Copred*$(\mathfrak{B})$.
4. *Copred*$(\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}) \subseteq$ *Copred*$(\mathfrak{A}) \cap$ *Copred*$(\mathfrak{B})$.

Demostració.

1. $\left.\begin{array}{l} \mathfrak{A} \wedge \mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{A} \Leftrightarrow \text{Pred}(\mathfrak{A} \wedge \mathfrak{B}) \subseteq \text{Pred}(\mathfrak{A}) \\ \mathfrak{A} \wedge \mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{B} \Leftrightarrow \text{Pred}(\mathfrak{A} \wedge \mathfrak{B}) \subseteq \text{Pred}(\mathfrak{B}) \end{array}\right\} \Rightarrow$

   $$\Rightarrow \text{Pred}(\mathfrak{A} \wedge \mathfrak{B}) \subseteq \text{Pred}(\mathfrak{A}) \cap \text{Pred}(\mathfrak{B}).$$

2. $\left.\begin{array}{l} \mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{A} \vee \mathfrak{B} \Leftrightarrow \text{Pred}(\mathfrak{A}) \subseteq \text{Pred}(\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}) \\ \mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{A} \vee \mathfrak{B} \Leftrightarrow \text{Pred}(\mathfrak{B}) \subseteq \text{Pred}(\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}) \end{array}\right\} \Rightarrow$

   $$\Rightarrow \text{Pred}(\mathfrak{A}) \cup \text{Pred}(\mathfrak{B}) \subseteq \text{Pred}(\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}).$$

3. Prenent complementaris a 1.
4. Prenent complementaris a 2.

Observació. Igual que succeeix amb els intervals modals de nombres reals, no es compleix la igualtat ja que el meet de dos intervals no s'identifica amb la intersecció, així com el join de dos intervals no s'identifica amb la reunió.

3.1.5 Predicats i copredicats intervalars

Definició 3.38 ***(Conjunt de predicats intervalars)***
Definim el conjunt dels ***predicats intervalars*** *i el representem per* *Pred*$*(\mathbb{M})$ *com*

$$Pred*(\mathbb{M}) := \{P \in Pred(\mathbb{M}) \mid P := (X \in \mathfrak{X}'),\ \mathfrak{X}' \in I(\mathbb{M})\}.$$

Definició 3.39 ***(Conjunt de copredicats intervalars)***
Definim el conjunt dels ***copredicats intervalars*** *i el representem per* $Copred{*}\,(\mathbb{M})$ *com*

$$Copred * (\mathbb{M}) := \{P \in Pred(\mathbb{M}) \mid P := (\neg\,(X \in \mathfrak{X}'))\,,\ \mathfrak{X}' \in I\,(\mathbb{M})\}\,,$$

on $\mathfrak{X}' \in I\,(\mathbb{M})\,.$

Definició 3.40 ***(Conjunt de predicats intervalars acceptats per*** $\mathfrak{X}$***)***
Donat $\mathfrak{X} \in I^*\,(\mathbb{M})$*, definim el conjunt dels* ***predicats intervalars acceptats per*** $\mathfrak{X}$*, i el representem per* $Pred{*}\,(\mathfrak{X})$ *com*

$$Pred * (\mathfrak{X}) := \{P \in Pred * (\mathbb{M}) \mid P \in Pred(\mathfrak{X})\}\,.$$

Definició 3.41 ***(Conjunt de predicats intervalars rebutjats per*** $\mathfrak{X}$***)***
Donat $\mathfrak{X} \in I^*\,(\mathbb{M})$*, definim el conjunt dels* ***predicats intervalars rebutjats per*** $\mathfrak{X}$*, i el representem per* $Copred{*}\,(\mathfrak{X})$ *com*

$$Copred * (\mathfrak{X}) := \{P \in Copred * (\mathbb{M}) \mid P \in Copred(\mathfrak{X})\}\,.$$

Definició 3.42 ***(Operadors propi i impropi)***
Donat $\mathfrak{X} = (\mathfrak{X}', Q_{\mathfrak{X}}) \in I^*\,(\mathbb{M})$ *un interval modal de marques, definim sobre* $\mathfrak{X}$ *els següents operadors*

1. ***Operador propi,*** *que representem per* $Prop(\mathfrak{X})$ *i que definim per*

$$Prop\,(\mathfrak{X}) = Prop\,(\mathfrak{X}', Q_{\mathfrak{X}}) := (\mathfrak{X}', E)\,.$$

2. ***Operador impropi,*** *que representem per* $Impr(\mathfrak{X})$ *i que definim per*

$$Impr\,(\mathfrak{X}) = Impr\,(\mathfrak{X}', Q_{\mathfrak{X}}) := (\mathfrak{X}', U)\,.$$

Lema 3.43 *Si* $\mathfrak{A}, \mathfrak{X} \in I^*\,(\mathbb{M})\,,$ *es compleix*

1. $(X \in \mathfrak{X}') \in Pred{*}\,(\mathfrak{A}) \Leftrightarrow Impr(\mathfrak{X}) \subseteq \mathfrak{A}.$

2. $(\neg\,(X \in \mathfrak{X}')) \in Copred{*}\,(\mathfrak{A}) \Leftrightarrow Prop(\mathfrak{X}) \supseteq \mathfrak{A}.$

Demostració.

1. Podem fer la següent distinció de casos

- Si $\mathfrak{A}$ és propi
  $E(X, \mathfrak{A}')(X \in \mathfrak{X}') \Leftrightarrow \mathfrak{A}' \cap \mathfrak{X}' \neq \emptyset \Leftrightarrow (\mathfrak{A}', E) \supseteq (\mathfrak{X}', U)$.
- Si $\mathfrak{A}$ és impropi
  $U(X, \mathfrak{A}')(X \in \mathfrak{X}') \Leftrightarrow \mathfrak{A}' \subseteq \mathfrak{X}' \Leftrightarrow (\mathfrak{A}', U) \supseteq (\mathfrak{X}', U)$.

2. Aplicant l'anterior resultat

$$\begin{aligned}(\neg(X \in \mathfrak{X}')) \in \text{Copred} * (\mathfrak{A}) \Leftrightarrow \quad & (X \in \mathfrak{X}') \in \text{Pred} * (\text{dual}(\mathfrak{A})) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \text{Impr}(\mathfrak{X}) \subseteq \text{dual}(\mathfrak{A}) \Leftrightarrow \quad & \text{Prop}(\mathfrak{X}) \supseteq \mathfrak{A}.\end{aligned}$$

Proposició 3.44 *Donats* $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in I^*(\mathbb{M})$, *es compleix:*

1. $\mathit{Pred*}(\mathfrak{A} \wedge \mathfrak{B}) = \mathit{Pred*}(\mathfrak{A}) \cap \mathit{Pred*}(\mathfrak{B})$.
2. $\mathit{Pred*}(\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}) \supseteq \mathit{Pred*}(\mathfrak{A}) \cup \mathit{Pred*}(\mathfrak{B})$.
3. $\mathit{Copred*}(\mathfrak{A} \wedge \mathfrak{B}) \supseteq \mathit{Copred*}(\mathfrak{A}) \cup \mathit{Copred*}(\mathfrak{B})$.
4. $\mathit{Copred*}(\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}) = \mathit{Copred*}(\mathfrak{A}) \cap \mathit{Copred*}(\mathfrak{B})$.

Demostració.

1. $$\begin{aligned}(X \in \mathfrak{X}') \in \text{Pred} * (\mathfrak{A} \wedge \mathfrak{B}) \Leftrightarrow \quad & \text{Impr}(\mathfrak{X}) \subseteq (\mathfrak{A} \wedge \mathfrak{B}) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \quad & \text{Impr}(\mathfrak{X}) \subseteq (\mathfrak{A}), \text{Impr}(\mathfrak{X}) \subseteq (\mathfrak{B}) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \quad & (X \in \mathfrak{X}') \in (\text{Pred} * (\mathfrak{A}) \cap \text{Pred} * (\mathfrak{B})).\end{aligned}$$

2. A partir de la proposició 3.37

3. A partir de la proposició 3.37

4. $$\begin{aligned}&(\neg(X \in \mathfrak{X}')) \in \text{Copred} * (\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}) \Leftrightarrow \\ &\quad \Leftrightarrow (X \in \mathfrak{X}') \in \text{Pred} * (\text{dual}(\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B})) \Leftrightarrow \\ &\quad \Leftrightarrow (X \in \mathfrak{X}') \in \text{Pred} * (\text{dual}(\mathfrak{A}) \wedge \text{dual}(\mathfrak{B})) \Leftrightarrow \\ &\quad \Leftrightarrow (X \in \mathfrak{X}') \in \text{Pred} * (\text{dual}(\mathfrak{A})) \cap \text{Pred} * (\text{dual}(\mathfrak{B})) \Leftrightarrow \\ &\quad \Leftrightarrow (\neg(X \in \mathfrak{X}')) \in \text{Copred} * (\mathfrak{A}) \cap \text{Copred} * (\mathfrak{B})\end{aligned}$$

3.1.6 Intervals $k-$dimensionals

El sistema dels intervals de marques que acabem de construir s'estén de forma natural a estructures intervalars $k-$dimensionals.

Així direm $\mathfrak{X} \in I^*\left(\mathbb{M}^k(t, n, b)\right)$ quan

$$\mathfrak{X} = (\mathfrak{X}_1, \ldots, \mathfrak{X}_k) \text{ on } U(i, \{1, \ldots, k\}) \ \mathfrak{X}_i \in I^*(\mathbb{M}(t, n, b)).$$

Les relacions que hem estudiat sobre els intervals de marques passen a definir-se component a component en els intervals de marques $k-$dimensionals. Per aprofundir en l'estudi de la teoria intervalar k-dimensional, podeu veure Gardeñes, E.[5].

3.2 Extensió intervalar de funcions de marques

Definició 3.45 ***(Extensions unides)***
Si $f_{\mathbb{M}} : \mathbb{M}(t)^k \to \mathbb{M}(t)$ *és una funció de marques associada a la funció racional i contínua* $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$*, diem que*

$$Df_{\mathbb{M}} : I\left(\mathbb{M}(t,n)^k\right) \longrightarrow I\left(\mathbb{M}(t,\infty)\right),$$

definida per

$$Df_{\mathbb{M}}(\mathfrak{X}') := \left\langle Df\left(ProjReal\left(\mathfrak{X}'\right)\right), g_f\left(\mathfrak{X}'\right)\right\rangle$$

*és l'****extensió unida*** *d'*$f_{\mathbb{M}}$ *sobre l'interval de marques* $\mathfrak{X}' \in I(\mathbb{M})^k$,
on

- $Df\left(ProjReal\left(\mathfrak{X}'\right)\right)$ *és l'extensió intervalar unida de la funció* f *sobre l'interval clàssic ProjReal*$(\mathfrak{X}')$ *(Vegeu [33, pàg 22]).*
- $g_f\left(\mathfrak{X}'\right)$ *és la màxima de les granularitats deduïda segons la construcció teòrica dels extrems - marca de* $Df_M\left(\mathfrak{X}'\right)$ *tenint en compte que es tracta no d'una expressió calculada sinó definida; és a dir, una expressió real i no digital, i que per aquest motiu el valor de la granularitat digital calculada és nul·la.*

Observacions.

1. La determinació de l'extensió unida intervalar equival implícitament a la determinació dels valors mínim i màxim de la funció real sobre punts adequats del domini intervalar origen corresponent.

   La determinació de l'extensió unida amb imatge sobre $I(\mathbb{M}(t,\infty))$, està definida explícitament pressuposant dos passos:

   - Determinació dels punts-argument, els valors dels quals determinen els extrems de la funció unida intervalar.
   - Transposició sobre $\mathbb{M}(t,\infty)$ del càlcul teòric sobre $\mathbb{R}$ que a partir dels punts-argument corresponents permet d'obtenir els extrems de l'extensió unida intervalar.

2. L'extensió intervalar unida de la funció de marques $f_{\mathbb{M}}$ sobre $\mathfrak{X}'$ és purament analítica (no calculada efectivament) i, per tant, és consistent d'assignar-li la major de les granularitats que correspongui a la determinació de les marques associades als seus extrems.

3. Igual que en el cas dels intervals d'extrems reals, s'ha de definir l'extensió racional de la funció $f_{\mathbb{M}}$ per a permetre l'especificació de càlculs efectius.

4. Així com l'anàlisi intervalar és un sistema que semànticament lliga tres nivells: el nivell real (teòric), el nivell intervalar i el nivell dels intervals amb extrems digitals, l'anàlisi sobre els intervals de marques relliga també tres nivells: el nivell real i l'intervalar (tots ells teòrics) i el nivell dels intervals de marques, que és una para-realització del nivell intervalar. No es pot treballar directament amb un sistema de dos nivells constituïts per una banda, pels intervals de marques i per altra, per les marques, com ho demostra, per exemple, la diferència de dos intervals de marques amb intersecció no nul·la ni reduïda a un punt. L'interval diferència no es pot assolir a partir del sistema de diferències entre marques qualssevol dels intervals, ja que les diferències entre marques pròximes coincidents foren no-definides i, per tant, no podrien ser tractades per cap operador de màxim ni de mínim sense donar valors no-definits. Aquesta paradoxa no pot ser resolta sense recórrer a un sistema de tres nivells: intervals de marques, intervals estrictes i nombres reals.

Definició 3.46 ***(Operador intervalar-conjuntista de marques)***
Una funció

$$\Omega : S_1 \times S_2 \subseteq I(\mathbb{M}(t,n,b)) \times I(\mathbb{M}(t,n,b)) \to I(\mathbb{M}(t,n,b))$$

és un ***operador intervalar-conjuntista de marques*** *(parlarem d'un operador icm) associat a la funció real* $\omega : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, *quan el càlcul*

$$[\langle \underline{z}, g_z \rangle, \langle \overline{z}, g_z \rangle]' = \Omega(\mathfrak{X}', \mathfrak{Y}'),$$

vingui donat per

- *La determinació de les marques* $\langle \underline{z}, g_{\underline{z}} \rangle$ *i* $\langle \overline{z}, g_{\overline{z}} \rangle$, *resulta de substituir en el càlcul dels extrems ínfim i suprem de l'interval* $W(\mathit{ProjReal}(\mathfrak{X}', \mathfrak{Y}'))$ [2]

[2] $W(\mathrm{ProjReal}(\mathfrak{X}', \mathfrak{Y}'))$ és l'operador intervalar real corresponent de la funció ω sobre $\mathrm{ProjReal}(\mathfrak{X}', \mathfrak{Y}')$ (Vegeu [33, pàg 22]).

cada operador per l'operador de marques corresponent i cada operand per l'operand marca que li correspongui.

- *La granularitat g_z que és la màxima de les granularitats de $g_{\underline{z}}$ i $g_{\overline{z}}$.*

Proposició 3.47 ***(Càlcul dels operadors icm elementals)***
Donats $\mathfrak{X}', \mathfrak{Y}' \in I\left(\mathbb{M}\left(t,n\right)\right)$, que designem respectivament per $\left\langle \left[\underline{x}\,,\,\overline{x}\right]', g_x \right\rangle$ i per $\left\langle \left[\underline{y}\,,\,\overline{y}\right]', g_y \right\rangle$ respectivament, el càlcul dels operadors icm aritmètics $+$, $-$, $*$, $/$, max, min *sobre $\mathfrak{X}'$ i $\mathfrak{Y}'$ ve donat per*

1. $\mathfrak{X}' + \mathfrak{Y}' = \left[\langle \underline{x}, g_x\rangle + \left\langle \underline{y}, g_y\right\rangle, \langle \overline{x}, g_x\rangle + \langle \overline{y}, g_y\rangle\right]' = \left\langle \left[\underline{x}\,,\,\overline{x}\right]' + \left[\underline{y}\,,\,\overline{y}\right]', g_z \right\rangle.$

2. $\mathfrak{X}' - \mathfrak{Y}' = \left[\langle \underline{x}, g_x\rangle - \langle \overline{y}, g_y\rangle, \langle \overline{x}, g_x\rangle - \left\langle \underline{y}, g_y\right\rangle\right]' = \left\langle \left[\underline{x}\,,\,\overline{x}\right]' - \left[\underline{y}\,,\,\overline{y}\right]', g_z \right\rangle.$

3. $\mathfrak{X}' * \mathfrak{Y}' = \left\langle \left[\underline{x}\,,\,\overline{x}\right]' * \left[\underline{y}\,,\,\overline{y}\right]', g_z \right\rangle.$

4. *Si* $0 \notin$ *ProjReal*$(\mathfrak{Y}')$, $\mathfrak{X}'/\mathfrak{Y}' = \left\langle \left[\underline{x}\,,\,\overline{x}\right]' / \left[\underline{y}\,,\,\overline{y}\right]', g_z \right\rangle.$

5. $\max\left\{\mathfrak{X}', \mathfrak{Y}'\right\} = \left\langle \max\left\{\left[\underline{x}\,,\,\overline{x}\right]', \left[\underline{y}\,,\,\overline{y}\right]'\right\}, g_z \right\rangle.$

6. $\min\left\{\mathfrak{X}', \mathfrak{Y}'\right\} = \left\langle \min\left\{\left[\underline{x}\,,\,\overline{x}\right]', \left[\underline{y}\,,\,\overline{y}\right]'\right\}, g_z \right\rangle.$

essent en cada cas, el valor de la granularitat g_z aquell que ve determinat per la major de les granularitats en el càlcul dels extrems-marca de l'interval resultant.

Demostració. Conseqüència immediata de la definició 3.46 i de la definició de funció de marques.

Definició 3.48 ***(Extensió racional conjuntista)***
Si $f_{\mathbb{M}(t,n)} : \mathbb{M}\left((t,n,b)\right)^k \to \mathbb{M}\left(t,n,b\right)$ és la funció de marques associada a la funció racional contínua $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$, en la qual tots els operadors que la formen són operadors aritmètics ($+$, $-$, $*$, $/$, max, min)[3], *es defineix*

[3] Es tracta, com es va estudiar en el capítol anterior, d'operadors racionals -centrats. L'ampliació del conjunt d'operadors elementals haurà de contemplar que els nous operadors també siguin racionals.

D'ara en endavant, quan ens referim a una funció racional, entendrem que els operadors que la formen són dels estudiats i, per tant, són racionals -centrats.

*l'**extensió racional conjuntista** d'$f_{\mathbb{M}(t,n)}$ i es representa per $f_{\mathbb{M}(t,n)}R$, com aquella funció $f_{\mathbb{M}(t,n)}R : I\left(\mathbb{M}(t,n,b)^k\right) \to I(\mathbb{M}(t,n,b))$ construïda a partir de l'arbre sintàctic de la funció $f_{\mathbb{M}(t,n)}$ en què cada un dels arguments $\langle x_1, g_1\rangle, \ldots, \langle x_k, g_k\rangle$ és substituït per arguments d'intervals de marques $\mathfrak{X}'_1, \ldots, \mathfrak{X}'_k$; cada un dels operadors aritmètics d'$f_{\mathbb{M}(t,n)}$ pel corresponent operador icm aritmètic de marques; i on cada una de les incidències de les variables multiincidents s'opera com variable independent.*

Proposició 3.49 *Si $Df_{\mathbb{M}}(\mathfrak{X}')$ i $f_{\mathbb{M}(t,n)}R(\mathfrak{X}')$ són l'extensió intervalar unida i l'extensió racional conjuntista d'$f_{\mathbb{M}(t,n)}$ respectivament, sobre l'interval de marques $\mathfrak{X}' \in I\left(\mathbb{M}(t)^k\right)$, i si g_z és la granularitat associada a $f_{\mathbb{M}(t,n)}R(\mathfrak{X}')$, calculada amb el criteri maximalista, es compleix*

$$U\left(\alpha, \left]\frac{g_z}{t}, 1\right]\right) Df_{\mathbb{M}}(\mathfrak{X}') \subseteq_\alpha f_{\mathbb{M}(t,n)}R(\mathfrak{X}').$$

Demostració.

$$Df_{\mathbb{M}}(\mathfrak{X}') \subseteq f_{\mathbb{M}(t,\infty)}R(\mathfrak{X}') \approx_\alpha f_{\mathbb{M}(t,n)}R(\mathfrak{X}')$$

donat que $\mathrm{ProjReal}\left(f_{\mathbb{M}(t,\infty)}R(\mathfrak{X}')\right) = fR(\mathrm{ProjReal}(\mathfrak{X}'))$.

Proposició 3.50 ***(Inclusivitat de l'extensió** $f_{\mathbb{M}}R$)*

L'extensió $f_{\mathbb{M}(t,n)}R$ és inclusiva; és a dir, donats $\mathfrak{X}', \mathfrak{Y}' \in I(\mathbb{M}(t,n,b))^k$, tals que $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{Y}$, si g és compatible amb αt, essent g la màxima de les granularitats obtingudes en els càlculs de $f_{\mathbb{M}(t,n)}R(\mathfrak{Y})$ i $f_{\mathbb{M}(t,n)}R(\mathfrak{X})$ sota un criteri maximalista, aleshores

$$f_{\mathbb{M}(t,n)}R(\mathfrak{X}) \subseteq_{2\alpha} f_{\mathbb{M}(t,n)}R(\mathfrak{Y}).$$

Demostració. Per la inclusivitat dels operadors intervalars reals i a les propietats de la inclusió dels intervals de marques.

$$f_{\mathbb{M}(t,n)}R(\mathfrak{X}') \approx_\alpha f_{\mathbb{M}(t,\infty)}R(\mathfrak{X}') \subseteq f_{\mathbb{M}(t,\infty)}R(\mathfrak{Y}') \approx_\alpha f_{\mathbb{M}(t,n)}R(\mathfrak{Y}').$$

Proposició 3.51 ***(Semàntica de l'extensió** $f_{\mathbb{M}(t,n)}R$)*

Sigui $f_{\mathbb{M}(t,n)}R$ l'extensió racional conjuntista de la funció $f_{\mathbb{M}(t,n)} : \mathbb{M}(t,n)^k \to \mathbb{M}(t,n)$. Donat $\mathfrak{X}' = \left[\underline{X}, \overline{X}\right]' \in I(\mathbb{M}(t,n))^k$, si $\left[\underline{Z}, \overline{Z}\right] = f_{\mathbb{M}(t,n)}R(\mathfrak{X}')$, es compleix que

$$\begin{aligned} &U\left([\underline{z}, \overline{z}], \left(\underline{z} \in Iv'\left(\underline{\widetilde{Z}}\right)\right), \left(\overline{z} \in Iv'\left(\overline{\widetilde{Z}}\right)\right)\right) \\ &\qquad E\left(X = [\underline{x}, \overline{x}], \left(\underline{x} \in Iv'\left(\underline{X}, \overline{X}\right)\right), \left(\overline{x} \in Iv'\left(\underline{X}, \overline{X}\right)\right)\right) [\underline{z}, \overline{z}] = fR(X). \end{aligned}$$

Demostració. Si $\left[\underline{Z}, \overline{Z}\right] = f_{\mathbb{M}(t,n)} R\left(\mathfrak{X}'\right)$, tindrem

$$\begin{aligned} \underline{Z} &= f_{1\mathbb{M}(t,n)}\left(\underline{X}, \overline{X}\right) \\ \overline{Z} &= f_{2\mathbb{M}(t,n)}\left(\underline{X}, \overline{X}\right). \end{aligned}$$

Utilitzant la semàntica de les funcions de marques (Capítol anterior, teorema 2.65) resulta

$$\begin{aligned} U\left(\underline{z}, Iv'\left(\widetilde{\underline{Z}}\right)\right) E\left(x_1, Iv'\left(\underline{X}, \overline{X}\right)\right) \ \underline{z} = f_1\left(x_1\right) \\ U\left(\overline{z}, Iv'\left(\widetilde{\overline{Z}}\right)\right) E\left(x_2, Iv'\left(\underline{X}, \overline{X}\right)\right) \ \overline{z} = f_2\left(x_2\right) \end{aligned}$$

on f_1 i f_2 són les funcions que donen lloc als valors ínfim i suprem de fR. Prenent $\underline{x} = x_1$ i $\overline{x} = x_2$ queda demostrada la proposició.

3.2.1 Extensions semàntiques sobre $I^*(\mathbb{M})$

Definició 3.52 ***(Extensions icm pobres)***

Si $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ és una funció racional contínua i $f_{\mathbb{M}(t,\infty)}$ una funció de marques associada, direm que

$$F_{\mathbb{M}(t,\infty)} : \mathbb{M}\left(t, \infty\right)^k \to I\left(\mathbb{M}\left(t, \infty\right)\right)$$

és una ***extensió icm pobra*** *d'$f_{\mathbb{M}(t,\infty)}$, quan donada $\langle a, g\rangle \in \mathbb{M}\left(t, \infty\right)^k$ tal que $f_{\mathbb{M}(t,\infty)}\left(\langle a, g\rangle\right)$ és vàlid, si existeix $F_{\mathbb{M}(t,\infty)}\left(\langle a, g\rangle\right)'$ aleshores*

$$f_{\mathbb{M}(t,\infty)}\left(\langle a, g\rangle\right) \in F_{\mathbb{M}(t,\infty)}\left(\langle a, g\rangle\right)'.$$

Proposició 3.53 ***(Semàntica de les extensions icm pobres)***

Sigui $f_{\mathbb{M}(t,\infty)} : \mathbb{M}\left(t, \infty\right)^k \to \mathbb{M}\left(t, \infty\right)$ funció de marques associada a la funció racional contínua $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$. Donada $F_{\mathbb{M}(t,\infty)} : \mathbb{M}\left(t, \infty\right)^k \to I\left(\mathbb{M}\left(t, \infty\right)\right)$,

si $\langle a, g\rangle \in \mathbb{M}\left(t, \infty\right)^k$, $f_{\mathbb{M}(t,\infty)}\left(\langle a, g\rangle\right)$ és vàlid i existeix $F_{\mathbb{M}(t,\infty)}\left(\langle a, g\rangle\right)'$, aleshores, sempre que les marques que intervinguin siguin vàlides, es compleix que

$$f_{\mathbb{M}(t,\infty)}\left(\langle a, g\rangle\right) \in F_{\mathbb{M}(t,\infty)}\left(\langle a, g\rangle\right)' \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow U\left(\mathfrak{X}', I\left(\mathbb{M}\left(t, \infty\right)^k\right)\right) \ \langle a, g\rangle \in \mathfrak{X}' \Rightarrow F_{\mathbb{M}(t,\infty)}\left(\langle a, g\rangle\right)' \cap Df_{\mathbb{M}}\left(\mathfrak{X}'\right) \neq \emptyset.$$

Demostració.

$\Rightarrow$) Sigui $\mathfrak{X}' \in I\left(\mathbb{M}(t,\infty)^k\right)$.

Si $\langle a,g\rangle \in \mathfrak{X}'$, resultarà

$$f_{\mathbb{M}(t,\infty)}(\langle a,g\rangle) \in F_{\mathbb{M}(t,\infty)}(\langle a,g\rangle)'$$

i per tant,

$$F_{\mathbb{M}(t,\infty)}(\langle a,g\rangle)' \cap Df_{\mathbb{M}}(\mathfrak{X}') \neq \emptyset.$$

$\Leftarrow$) Prenem l'interval puntual $\mathfrak{X}' = [\langle a,g\rangle, \langle a,g\rangle]'$.

Donat que $\langle a,g\rangle \in \mathfrak{X}'$, per hipòtesi es complirà

$$F_{\mathbb{M}(t,\infty)}(\langle a,g\rangle)' \cap Df_{\mathbb{M}}\left([\langle a,g\rangle, \langle a,g\rangle]'\right) \neq \emptyset$$

i per tant,

$$f_{\mathbb{M}(t,\infty)}(\langle a,g\rangle) \in F_{\mathbb{M}(t,\infty)}(\langle a,g\rangle)',$$

donada la validesa de $f_{\mathbb{M}(t,\infty)}(\langle a,g\rangle)$.

Definició 3.54 ***(Extensions semàntiques intervalars de funcions contínues de marques)***

Diem que la funció $F_{\mathbb{M}} : I^*\left(\mathbb{M}^k\right) \to I^*(\mathbb{M})$ *és una* ***extensió semàntica intervalar*** *de la funció* $f_{\mathbb{M}} : \mathbb{M}(t)^k \to \mathbb{M}(t)$*, si per un interval de marques* $\mathfrak{A} \in I^*\left(\mathbb{M}^k\right)$ *tal que existeix* $F_{\mathbb{M}}(\mathfrak{A})$*, es compleix*

$$U\left(\mathfrak{X}', I\left(\mathbb{M}^k\right)\right)((. \in \mathfrak{X}') \in Pred*(\mathfrak{A}) \Rightarrow (. \in Df_{\mathbb{M}}(\mathfrak{X}')) \in Pred*(F_{\mathbb{M}}(\mathfrak{A}))).$$

3.2.2 Funcions semàntiques

Definició 3.55 ***(Funció $*-$semàntica)***

La ***funció $*-$semàntica*** *associada a* $f_{\mathbb{M}(t,n)} : \mathbb{M}(t,n)^k \to \mathbb{M}(t,n)$*, la representem per* $f^*_{\mathbb{M}(t,\infty)}$*,*

$$f^*_{\mathbb{M}(t,\infty)} : I^*\left(\mathbb{M}(t,n)^k\right) \subseteq I^*\left(\mathbb{M}(t,\infty)^k\right) \longrightarrow I^*(\mathbb{M}(t,\infty))$$

i per un interval de marques $\mathfrak{X} \in I^*\left(\mathbb{M}(t,n)^k\right)$*, la definim com*

$$f^*_{\mathbb{M}(t,\infty)}(\mathfrak{X}) := \langle f^*(ProjReal(\mathfrak{X})), t, g_f(\mathfrak{X}), \infty, b\rangle,$$

en què la granularitat $g_f(\mathfrak{X})$ *és la màxima de les granularitats que s'obtindrien en el càlcul dels extrems-marca de* $f^*(ProjReal(\mathfrak{X}))$ *tenint present que es tracta d'una funció real i no digital i que, per tant, en el càlcul de la granularitat d'aquells extrems-marca el valor de la granularitat digital generada és nul.*

Definició 3.56 ***(Funció*** $**-$***semàntica)***
La ***funció*** $**-$***semàntica*** *associada a* $f_{\mathbb{M}(t,n)} : \mathbb{M}(t,n)^k \to \mathbb{M}(t,n)$*,* *la simbolitzem per* $f^{**}_{\mathbb{M}(t,\infty)}$*,*

$$f^{**}_{\mathbb{M}(t,\infty)} : I^*\left(\mathbb{M}(t,n)^k\right) \subseteq I^*\left(\mathbb{M}(t,\infty)^k\right) \longrightarrow I^*\left(\mathbb{M}(t,\infty)\right)$$

i sobre un interval de marques $\mathfrak{X} \in I^*\left(\mathbb{M}(t,n)^k\right)$ *la definim com*

$$f^{**}_{\mathbb{M}(t,\infty)}(\mathfrak{X}) := \langle f^{**}(\mathit{ProjReal}(\mathfrak{X})), t, g_f(\mathfrak{X}), \infty, b\rangle,$$

on la granularitat $g_f(\mathfrak{X})$ *és la màxima d'entre les granularitats obtingudes en el càlcul dels extrems-marca de* $f^{**}(\mathit{ProjReal}(\mathfrak{X}))$ *essent nul·la la granularitat digital, ja que igual com hem esmentat per a la funció* $*-$*semàntica, es tracta d'una funció real i no digital.*

Observacions.

1. Si $\mathfrak{X} = (\mathfrak{X}_p, \Phi)$ [4] obtindrem

   $$f^{*}_{\mathbb{M}(t,\infty)}(\mathfrak{X}) = f^{**}_{\mathbb{M}(t,\infty)}(\mathfrak{X}) = (Df_{\mathbb{M}}(\mathfrak{X}'), E),$$

   ja que en aquest cas

   $$f^*(\mathrm{ProjReal}(\mathfrak{X})) = f^{**}(\mathrm{ProjReal}(\mathfrak{X}))$$

   i en tenir unimodalitat pròpia

   $$f^*(\mathrm{ProjReal}(\mathfrak{X})) = (Df(\mathrm{ProjReal}(\mathfrak{X}')), E).$$

2. Si $\mathfrak{X} = (\Phi, \mathfrak{X}_i)$ obtindrem

   $$f^{*}_{\mathbb{M}(t,\infty)}(\mathfrak{X}) = f^{**}_{\mathbb{M}(t,\infty)}(\mathfrak{X}) = (Df(\mathrm{ProjReal}(\mathfrak{X}')), U),$$

   ja que com en el cas anterior

   $$f^*(\mathrm{ProjReal}(\mathfrak{X})) = f^{**}(\mathrm{ProjReal}(\mathfrak{X})) = (Df(\mathrm{ProjReal}(\mathfrak{X}')), U).$$

[4] L'operador Φ l'utilitzem per a indicar que una llista de components d'un vector és buida.

3.2.3 Teoremes semàntics

Teorema 3.57 ***(Teorema semàntic per $f^*_{\mathbb{M}(t,\infty)}$)***

Sigui $f_{\mathbb{M}(t,n)} : \mathbb{M}(t,n)^k \to \mathbb{M}(t,n)$ *. Donat* $\mathfrak{A} \in I^*\left(\mathbb{M}(t,n)^k\right)$*, Si* $F_{\mathbb{M}(t,\infty)} : I^*\left(\mathbb{M}(t,n)^k\right) \to I^*(\mathbb{M}(t,\infty))$ *és una funció tal que existeix* $F_{\mathbb{M}(t,\infty)}(\mathfrak{A}) \in I^*(\mathbb{M}(t,\infty))$*, aleshores, si totes les marques que intervenen són vàlides, les afirmacions següents són equivalents:*

1. $f^*_{\mathbb{M}(t,\infty)}(\mathfrak{A}) \subseteq F_{\mathbb{M}(t,\infty)}(\mathfrak{A})$.
2. $U\left(\mathfrak{X}', I\left(\mathbb{M}(t,n)^k\right)\right)$
   $(. \in \mathfrak{X}') \in \mathit{Pred}*(\mathfrak{A}) \Rightarrow (. \in Df_{\mathbb{M}}(\mathfrak{X}')) \in \mathit{Pred}*\left(F_{\mathbb{M}(t,\infty)}(\mathfrak{A})\right)$.
3. $U\left(A_p, \mathfrak{A}'_p\right) Q\left(Z, F_{\mathbb{M}(t,\infty)}(\mathfrak{A})\right) E\left(A_i, \mathfrak{A}'_i\right)\ Z = f_{\mathbb{M}(t,\infty)}(A_p, A_i)$.

Demostració.
1. $\Rightarrow$ 2.
Utilitzant l'equivalència vista en el lema 3.43, es dedueix

$$U\left(\mathfrak{X}', I\left(\mathbb{M}^k\right)\right)(. \in \mathfrak{X}') \in \text{Pred}*(\mathfrak{A}) \Leftrightarrow \text{Impr}(\mathfrak{X}') \subseteq \mathfrak{A}.$$

La inclusió $\text{Impr}(\mathfrak{X}') \subseteq \mathfrak{A}$ és equivalent a

$$E\left(A_p, \mathfrak{A}'_p\right)\left(A_p \in \mathfrak{X}'_1, \mathfrak{X}'_2 \supseteq \mathfrak{A}'_i\right).$$

Utilitzant la inclusivitat de l'extensió $Df_{\mathbb{M}}$ obtenim

$$E\left(A_p, \mathfrak{A}'_p\right) Df_{\mathbf{M}}(\mathfrak{X}'_1, \mathfrak{X}'_2) \supseteq Df_{\mathbf{M}}(A_p, \mathfrak{A}'_i),$$

expressió equivalent, utilitzant les observacions estudiades (pàg 119), a

$$E\left(A_p, \mathfrak{A}'_p\right) \text{Impr}\left(Df_{\mathbb{M}}(\mathfrak{X}')\right) \subseteq f^*_{\mathbb{M}(t,\infty)}(A_p, \mathfrak{A}_i)$$

de la qual es dedueix

$$\text{Impr}\left(Df_{\mathbb{M}}(\mathfrak{X}')\right) \subseteq f^*_{\mathbb{M}(t,\infty)}(\mathfrak{A}_p, \mathfrak{A}_i).$$

Com que per hipòtesi, $f^*_{\mathbb{M}(t,\infty)}(\mathfrak{A}_p, \mathfrak{A}_i) \subseteq F_{\mathbb{M}(t,\infty)}(\mathfrak{A})$ tindrem

$$\text{Impr}\left(Df_{\mathbb{M}}(\mathfrak{X}')\right) \subseteq F_{\mathbb{M}(t,\infty)}(\mathfrak{A}).$$

Aquesta última inclusió, a partir del lema 3.43, és equivalent a

$$(. \in Df_{\mathbb{M}}(\mathfrak{X}')) \in \text{Pred}* \left(F_{\mathbb{M}(t,\infty)}(\mathfrak{A})\right).$$

2. $\Rightarrow$ 1.
Partim de l'afirmació certa

$$U\left(A_p, \mathfrak{A}'_p\right)(. \in (A_p, \mathfrak{A}'_i)) \in \text{Pred}* (\mathfrak{A}).$$

Per hipòtesi es complirà

$$U\left(A_p, \mathfrak{A}'_p\right)(. \in Df_{\mathbb{M}}(A_p, \mathfrak{A}'_i)) \in \text{Pred}* \left(F_{\mathbb{M}(t,\infty)}(\mathfrak{A})\right),$$

expressió equivalent (lema 3.43), a

$$U\left(A_p, \mathfrak{A}'_p\right) \text{Impr}\left(Df_{\mathbb{M}}(A_p, \mathfrak{A}'_i)\right) \subseteq F_{\mathbb{M}(t,\infty)}(\mathfrak{A})$$

que a la vegada és equivalent (observacions pg 119) a

$$U\left(A_p, \mathfrak{A}'_p\right) f^*_{\mathbb{M}(t,\infty)}(A_p, \mathfrak{A}_i) \subseteq F_{\mathbb{M}(t,\infty)}(\mathfrak{A}),$$

ja que $f^*_{\mathbb{M}(t,\infty)}(A_p, \mathfrak{A}_i) = \text{Impr}(Df_{\mathbb{M}}(A_p, \mathfrak{A}'_i))$.

Fent el join per cada $A_p, \mathfrak{A}'_p$ obtenim l'equivalència amb

$$f^*_{\mathbb{M}(t,\infty)}(\mathfrak{A}_p, \mathfrak{A}_i) \subseteq F_{\mathbb{M}(t,\infty)}(\mathfrak{A}).$$

1. $\Leftrightarrow$ 3.
Tenint en compte que el valor $f^*_{\mathbb{M}(t,\infty)}(\mathfrak{A})$ compleix

$$\text{ProjReal}\left(f^*_{\mathbb{M}(t,\infty)}(\mathfrak{A})\right) = f^*(\text{ProjReal}(\mathfrak{A})),$$

podem afirmar

$$f^*_{\mathbb{M}(t,\infty)}(\mathfrak{A}) \subseteq F_{\mathbb{M}(t,\infty)}(\mathfrak{A}) \Leftrightarrow f^*(\text{ProjReal}(\mathfrak{A})) \subseteq \text{ProjReal}\left(F_{\mathbb{M}(t,\infty)}(\mathfrak{A})\right);$$

afirmació que és equivalent a la semàntica d'intervals modals reals associada a f^*

$$U\left(a_p, \text{ProjReal}\left(\mathfrak{A}'_p\right)\right) Q\left(z, \text{ProjReal}\left(F_{\mathbb{M}(t,\infty)}(\mathfrak{A})\right)\right)$$
$$E\left(a_i, \text{ProjReal}(\mathfrak{A}'_i)\right)(z = f(a_p, a_i)).$$

i si identifiquem els valors a_p, a_i i z amb les marques $A_p = \langle a_p, t, g_{a_p}, \infty, b\rangle$, $A_i = \langle a_i, t, g_{a_i}, \infty, b\rangle$ i $Z = \langle z, t, g_z, \infty, b\rangle$, arribem, suposant totes les marques vàlides a la semàntica final,

$$U\left(A_p, \mathfrak{A}'_p\right) Q\left(Z, \left(F_{\mathbb{M}(t,\infty)}(\mathfrak{A})\right)'\right) E\left(A_i, \mathfrak{A}'_i\right)\ Z = f_{\mathbb{M}(t,\infty)}(A_p, A_i).$$

Corol·lari 3.58 ***(Teorema semàntic sobre*** $I^*(\mathbb{M}(t,n))$***)***

Sigui $f_{\mathbb{M}} : \mathbb{M}^k \to \mathbb{M}$ *una funció de marques associada a la funció racional i contínua* $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$*. Donat* $\mathfrak{A} \in I^*\left(\mathbb{M}(t,n)^k\right)$*, si* $F_{\mathbb{M}(t,n)} : I^*\left(\mathbb{M}(t,n)^k\right) \to I^*(\mathbb{M}(t,n))$ *és una funció tal que existeix* $F_{\mathbb{M}(t,n)}(\mathfrak{A})$*, per un valor* $\xi(\alpha) \in]0,1]$ [5] *podrem afirmar que si*

$$\begin{array}{l} f^*_{\mathbb{M}(t,\infty)}(\mathfrak{A}) \subseteq_\alpha F_{\mathbb{M}(t,n)}(\mathfrak{A}), \text{ aleshores} \\ \quad U\left(A_p, \mathfrak{A}'_p\right) Q\left(Z, \left(F_{\mathbb{M}(t,n)}(\mathfrak{A})\right)'\right) E\left(A_i, \mathfrak{A}'_i\right)\ Z \approx_{\xi(\alpha)} f_{\mathbb{M}(t,n)}(A_p, A_i). \end{array}$$

sota un criteri maximalista del càlcul de la granularitat i si les granularitats de Z *i de* $f_{\mathbb{M}(t,n)}(A_p, A_i)$ *són compatibles amb* $\xi(\alpha)\, t$.

Demostració.

Utilitzant el teorema 3.57 aplicat a la inclusió $f^*_{\mathbb{M}(t,\infty)}(\mathfrak{A}) \subseteq f^*_{\mathbb{M}(t,\infty)}(\mathfrak{A})$ tenim la semàntica

$$U\left(A_p, \mathfrak{A}'_p\right) Q\left(Y, f^*_{\mathbb{M}(t,\infty)}(\mathfrak{A})\right) E\left(A_i, \mathfrak{A}'_i\right)\ Y = f_{\mathbb{M}(t,\infty)}(A_p, A_i) \tag{3.1}$$

i es compleix

$$f_{\mathbb{M}(t,\infty)}(A_p, A_i) \approx_{\beta_1} f_{\mathbb{M}(t,\infty)}(DI_n(A_p, A_i)) \approx_{\beta_2} f_{\mathbb{M}(t,n)}(DI_n(A_p, A_i))$$

i per tant,

$$f_{\mathbb{M}(t,\infty)}(A_p, A_i) \approx_{\beta_1+\beta_2} f_{\mathbb{M}(t,n)}(DI_n(A_p, A_i))$$

suposant marques vàlides respecte de $\beta_1 t$ i de $\beta_2 t$ en els cassos respectius[6].

Per hipòtesi, $f^*_{\mathbb{M}(t,\infty)}(\mathfrak{A}) \subseteq_\alpha F_{\mathbb{M}(t,n)}(\mathfrak{A})$ i per tant, segons la modalitat de $f^*_{\mathbb{M}(t,\infty)}(\mathfrak{A})$ i de $F_{\mathbb{M}(t,n)}(\mathfrak{A})$ tindrem

1. $f^*_{\mathbb{M}(t,\infty)}(\mathfrak{A})$ i $F_{\mathbb{M}(t,n)}(\mathfrak{A})$ propi,

$$f^*_{\mathbb{M}(t,\infty)}(\mathfrak{A}) \subseteq_\alpha F_{\mathbb{M}(t,n)}(\mathfrak{A}) \Leftrightarrow \left(f^*_{\mathbb{M}(t,\infty)}(\mathfrak{A})\right)' \subseteq_\alpha \left(F_{\mathbb{M}(t,n)}(\mathfrak{A})\right)'.$$

---

[5] Aquest valor $\xi(\alpha)$ es determina en la demostració.

[6] Pel criteri maximalista

$$\begin{aligned} f(c_1, c_2) * (1 \pm \gamma_{1,2}) \subseteq\ & fR(c_1 * (1 \pm g_d), c_2 * (1 \pm g_d)) \subseteq \\ \subseteq\ & fR\left(\dot{di}(c_1), \dot{di}(c_2)\right) = \\ =\ & f(\dot{di}(c_1), \dot{di}(c_2)). \end{aligned}$$

En aquest cas, i sempre que les marques que intervenen siguin compatibles amb αt, es complirà

$$U\left(Y,\left(f^*_{\mathbb{M}(t,\infty)}\left(\mathfrak{A}\right)\right)'\right)E\left(Z,\left(F_{\mathbb{M}(t,n)}\left(\mathfrak{A}\right)\right)'\right)\ Y\approx_\alpha Z,$$

combinant aquesta igualtat dèbil amb

$$\begin{aligned}&U\left(A_p,\mathfrak{A}'_p\right)E\left(Y,f^*_{\mathbb{M}(t,\infty)}\left(\mathfrak{A}\right)\right)E\left(A_i,\mathfrak{A}'_i\right)\\&\qquad Y=f_{\mathbb{M}(t,\infty)}\left(A_p,A_i\right)\approx_{\beta_1+\beta_2}f_{\mathbb{M}(t,n)}\left(DI_n\left(A_p,A_i\right)\right)\end{aligned}$$

es dedueix que

$$\begin{aligned}&U\left(A_p,\mathfrak{A}'_p\right)E\left(Y,f^*_{\mathbb{M}(t,\infty)}\left(\mathfrak{A}\right)\right)E\left(Z,\left(F_{\mathbb{M}(t,n)}\left(\mathfrak{A}\right)\right)'\right)E\left(A_i,\mathfrak{A}'_i\right)\\&\qquad Z\approx_\alpha Y=f_{\mathbb{M}(t,\infty)}\left(A_p,A_i\right)\approx_{\beta_1+\beta_2}f_{\mathbb{M}(t,n)}\left(DI_n\left(A_p,A_i\right)\right).\end{aligned}$$

i aplicant la $(\alpha+\beta)$ - transitivitat de la igualtat dèbil entre marques, resulta

$$\begin{aligned}&U\left(A_p,\mathfrak{A}'_p\right)E\left(Z,\left(F_{\mathbb{M}(t,n)}\left(\mathfrak{A}\right)\right)'\right)E\left(A_i,\mathfrak{A}'_i\right)\\&\qquad Z\approx_{\alpha+\beta_1+\beta_2}f_{\mathbb{M}(t,n)}\left(DI_n\left(A_p,A_i\right)\right).\end{aligned}$$

2. $f^*_{\mathbb{M}(t,\infty)}\left(\mathfrak{A}\right)$ i $F_{\mathbb{M}(t,n)}\left(\mathfrak{A}\right)$ impropis,

$$f^*_{\mathbb{M}(t,\infty)}\left(\mathfrak{A}\right)\subseteq_\alpha F_{\mathbb{M}(t,n)}\left(\mathfrak{A}\right)\Leftrightarrow\left(F_{\mathbb{M}(t,n)}\left(\mathfrak{A}\right)\right)'\subseteq_\alpha\left(f^*_{\mathbb{M}(t,\infty)}\left(\mathfrak{A}\right)\right)'.$$

Tindrem

$$U\left(Z,\left(F_{\mathbb{M}(t,n)}\left(\mathfrak{A}\right)\right)'\right)E\left(Y,\left(f^*_{\mathbb{M}(t,\infty)}\left(\mathfrak{A}\right)\right)'\right)\ Y\approx_\alpha Z,$$

i tal com s'ha fet en el cas anterior,

$$\begin{aligned}&U\left(A_p,\mathfrak{A}'_p\right)U\left(Y,f^*_{\mathbb{M}(t,\infty)}\left(\mathfrak{A}\right)\right)E\left(A_i,\mathfrak{A}'_i\right)\\&\qquad Y=f_{\mathbb{M}(t,\infty)}\left(A_p,A_i\right)\approx_{\beta_1+\beta_2}f_{\mathbb{M}(t,n)}\left(DI_n\left(A_p,A_i\right)\right)\end{aligned}$$

i per tant,

$$\begin{aligned}&U\left(Z,F'_{\mathbb{M}(t,n)}\left(\mathfrak{A}\right)\right)E\left(Y,\left(f^*_{\mathbb{M}(t,\infty)}\left(\mathfrak{A}\right)\right)'\right)\\&\quad U\left(A_p,\mathfrak{A}'_p\right)U\left(Y,f^*_{\mathbb{M}(t,\infty)}\left(\mathfrak{A}\right)\right)E\left(A_i,\mathfrak{A}'_i\right)\\&\quad Z\approx_\alpha Y=f_{\mathbb{M}(t,\infty)}\left(A_p,A_i\right)\approx_{\beta_1+\beta_2}f_{\mathbb{M}(t,n)}\left(DI_n\left(A_p,A_i\right)\right),\end{aligned}$$

acabant la demostració, tal com hem fet en el cas anterior, aplicant la $(\alpha+\beta)$- transitivitat de la igualtat dèbil entre marques

$$U\left(A_p,\mathfrak{A}'_p\right) E\left(Z,\left(F_{\mathbb{M}(t,n)}(\mathfrak{A})\right)'\right) E\left(A_i,\mathfrak{A}'_i\right) \\ Z \approx_{\alpha+\beta_1+\beta_2} f_{\mathbb{M}(t,n)}\left(DI_n\left(A_p,A_i\right)\right).$$

3. $f^*_{\mathbb{M}(t,\infty)}(\mathfrak{A})$ impropi i $F_{\mathbb{M}(t,n)}(\mathfrak{A})$ propi,

$$f^*_{\mathbb{M}(t,\infty)}(\mathfrak{A}) \subseteq_\alpha F_{\mathbb{M}(t,n)}(\mathfrak{A}) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow E\left(Y,\left(f^*_{\mathbb{M}(t,\infty)}(\mathfrak{A})\right)'\right) E\left(Z,\left(F_{\mathbb{M}(t,n)}(\mathfrak{A})\right)'\right)\ Y \approx_\alpha Z$$

i conjuntament amb la semàntica expressada en 3.1

$$U\left(A_p,\mathfrak{A}'_p\right) U\left(Y,f^*_{\mathbb{M}(t,\infty)}(\mathfrak{A})\right) E\left(A_i,\mathfrak{A}'_i\right) \\ Y = f_{\mathbb{M}(t,\infty)}\left(A_p,A_i\right) \approx_{\beta_1+\beta_2} f_{\mathbb{M}(t,n)}\left(DI_n\left(A_p,A_i\right)\right),$$

en resulta

$$U\left(A_p,\mathfrak{A}'_p\right) U\left(Y,f^*_{\mathbb{M}(t,\infty)}(\mathfrak{A})\right) E\left(A_i,\mathfrak{A}'_i\right) \\ E\left(Y,\left(f^*_{\mathbb{M}(t,\infty)}(\mathfrak{A})\right)'\right) E\left(Z,\left(F'_{\mathbb{M}(t,n)}(\mathfrak{A})\right)\right) \\ Z \approx_\alpha Y = f_{\mathbb{M}(t,\infty)}\left(A_p,A_i\right) \approx_{\beta_1+\beta_2} f_{\mathbb{M}(t,n)}\left(DI_n\left(A_p,A_i\right)\right),$$

i per tant,

$$U\left(A_p,\mathfrak{A}'_p\right) E\left(Z,\left(F_{\mathbb{M}(t,n)}(\mathfrak{A})\right)'\right) E\left(A_i,\mathfrak{A}'_i\right) \\ Z \approx_{\alpha+\beta_1+\beta_2} f_{\mathbb{M}(t,n)}\left(DI_n\left(A_p,A_i\right)\right).$$

4. $f^*_{\mathbb{M}(t,\infty)}(\mathfrak{A})$ propi i $F_{\mathbb{M}(t,n)}(\mathfrak{A})$ impropi,

$$f^*_{\mathbb{M}(t,\infty)}(\mathfrak{A}) \subseteq_\alpha F_{\mathbb{M}(t,n)}(\mathfrak{A}) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow U\left(Y,\left(f^*_{\mathbb{M}(t,\infty)}(\mathfrak{A})\right)'\right) U\left(Z,F'_{\mathbb{M}(t,n)}(\mathfrak{A})\right)\ Z \approx_\alpha Y.$$

Combinant-ho amb la semàntica

$$U\left(A_p,\mathfrak{A}'_p\right) E\left(Y,\left(f^*_{\mathbb{M}(t,\infty)}(\mathfrak{A})\right)'\right) E\left(A_i,\mathfrak{A}'_i\right) \\ Y = f_{\mathbb{M}(t,\infty)}\left(A_p,A_i\right) \approx_{\beta_1+\beta_2} f_{\mathbb{M}(t,n)}\left(DI_n\left(A_p,A_i\right)\right)$$

en resulta

$$\begin{aligned}U\left(A_p,\mathfrak{A}'_p\right)E\left(Y,\left(f^*_{\mathbb{M}(t,\infty)}\left(\mathfrak{A}\right)\right)'\right)E\left(A_i,\mathfrak{A}'_i\right)\\ U\left(Y,\left(f^*_{\mathbb{M}(t,\infty)}\left(\mathfrak{A}\right)\right)'\right)U\left(Z,F'_{\mathbb{M}(t,n)}\left(\mathfrak{A}\right)\right)\\ Z\approx_\alpha Y=f_{\mathbb{M}(t,\infty)}\left(A_p,A_i\right)\approx_{\beta_1+\beta_2}f_{\mathbb{M}(t,n)}\left(DI_n\left(A_p,A_i\right)\right)\end{aligned}$$

i per tant,

$$\begin{aligned}U\left(A_p,\mathfrak{A}'_p\right)U\left(Z,\left(F_{\mathbb{M}(t,n)}\left(\mathfrak{A}\right)\right)'\right)E\left(A_i,\mathfrak{A}'_i\right)\\ Z\approx_{\alpha+\beta_1+\beta_2}f_{\mathbb{M}(t,n)}\left(DI_n\left(A_p,A_i\right)\right).\end{aligned}$$

Teorema 3.59 ***(Teorema semàntic per $f^{**}_{\mathbb{M}(t,\infty)}$)***

Sigui $f_{\mathbb{M}(t,n)}:\mathbb{M}(t,n)^k\to\mathbb{M}(t,n)$. Donat $\mathfrak{A}\in I^*\left(\mathbb{M}(t,n)^k\right)$, Si $F_{\mathbb{M}(t,\infty)}:I^*\left(\mathbb{M}(t,n)^k\right)\to I^*\left(\mathbb{M}(t,\infty)\right)$ és una funció tal que existeix $F_{\mathbb{M}(t,\infty)}(\mathfrak{A})\in I^*\left(\mathbb{M}(t,\infty)\right)$, les afirmacions següents són equivalents:

1. $f^{**}_{\mathbb{M}(t,\infty)}(\mathfrak{A})\supseteq F_{\mathbb{M}(t,\infty)}(\mathfrak{A})$.
2. $U\left(\mathfrak{X}',I\left(\mathbb{M}(t,n)^k\right)\right)$
   $(.\notin\mathfrak{X}')\in Copred*(\mathfrak{A})\Rightarrow(.\notin Df_{\mathbb{M}}(\mathfrak{X}'))\in Copred*\left(F_{\mathbb{M}(t,\infty)}(\mathfrak{A})\right)$.
3. $U\left(A_i,\mathfrak{A}'_i\right)Q\left(Z,\left(dualF_{\mathbb{M}(t,\infty)}(\mathfrak{A})\right)\right)E\left(A_p,\mathfrak{A}'_p\right)\ Z=f_{\mathbb{M}(t,\infty)}\left(A_p,A_i\right)$.

sempre que totes les marques que intervenen siguin vàlides.

Demostració.

A partir de les definicions d'$f^*_{\mathbb{M}(t,\infty)}(\mathfrak{X})$ i d'$f^{**}_{\mathbb{M}(t,\infty)}(\mathfrak{X})$, resulta

$$\mathrm{dual}f^*_{\mathbb{M}(t,\infty)}(\mathfrak{X})=f^{**}_{\mathbb{M}(t,\infty)}\left(\mathrm{dual}\left(\mathfrak{X}\right)\right)$$

per tant, la demostració és conseqüència de l'anterior teorema 3.57 aplicat a la inclusió

$$f^*_{\mathbb{M}(t,\infty)}\left(\mathrm{dual}\left(\mathfrak{A}\right)\right)\subseteq\ \mathrm{dual}\left(F_{\mathbb{M}(t,\infty)}(\mathfrak{A})\right).$$

Corol·lari 3.60 ***(Teorema semàntic sobre $I^*\left(\mathbb{M}(t,n)\right)$)***

Sigui $f_{\mathbb{M}}:\mathbb{M}^k\to\mathbb{M}$ una funció de marques associada a la funció racional i contínua $f:\mathbb{R}^k\to\mathbb{R}$. Donat $\mathfrak{A}\in I^*\left(\mathbb{M}(t,n)^k\right)$, si $F_{\mathbb{M}(t,n)}:I^*\left(\mathbb{M}(t,n)^k\right)\to I^*\left(\mathbb{M}(t,n)\right)$ és una funció tal que existeix $F_{\mathbb{M}(t,n)}(\mathfrak{A})$, per *un valor* $\xi(\alpha) \in \,]0,1]$ [7] *podrem afirmar, sota un criteri maximalista del càlcul de la granularitat, que si*

$$f^{**}_{\mathbb{M}(t,\infty)}(\mathfrak{A}) \supseteq_\alpha F_{\mathbb{M}(t,n)}(\mathfrak{A}), \text{ aleshores}$$
$$U(A_i, \mathfrak{A}'_i)\, Q\left(Z, \left(dualF_{\mathbb{M}(t,n)}(\mathfrak{A})\right)'\right) E\left(A_p, \mathfrak{A}'_p\right) Z \approx_{\xi(\alpha)} f_{\mathbb{M}(t,n)}(A_p, A_i),$$

sempre que les granularitats de Z *i de* $f_{\mathbb{M}(t,n)}(A_p, A_i)$ *siguin compatibles amb* $\xi(\alpha)\, t$.

Demostració. A partir de la propietat 2 estudiada en el lema 3.30, resulta

$$f^{**}_{\mathbb{M}(t,\infty)}(\mathfrak{A}) \supseteq_\alpha F_{\mathbb{M}(t,n)}(\mathfrak{A}) \Leftrightarrow \text{dual}\left(f^{**}_{\mathbb{M}(t,\infty)}(\mathfrak{A})\right) \subseteq_\alpha \text{dual}\left(F_{\mathbb{M}(t,n)}(\mathfrak{A})\right)$$

i per tant,

$$f^{*}_{\mathbb{M}(t,\infty)}(\text{dual}(\mathfrak{A})) = \text{dual} f^{**}_{\mathbb{M}(t,\infty)}(\mathfrak{A}) \subseteq_\alpha \text{dual}\left(F_{\mathbb{M}(t,n)}(\mathfrak{A})\right)$$

i estem en condicions d'aplicar a aquesta inclusió el resultat demostrat en el teorema 3.58

$$U(A_i, \mathfrak{A}'_i)\, Q\left(Z, \text{dual}(F_{\mathbb{M}}(\mathfrak{A}))'\right) E\left(A_p, \mathfrak{A}'_p\right) Z \approx_{\xi(\alpha)} f_{\mathbb{M}(t,n)}(A_p, A_i).$$

3.2.4 Propietats de les funcions $*$ i $**$ semàntiques

Teorema 3.61 *Sota les condicions de les definicions 3.55 i 3.56, es compleix que*

$$f^{*}_{\mathbb{M}(t,\infty)}(\mathfrak{X}) \subseteq f^{**}_{\mathbb{M}(t,\infty)}(\mathfrak{X}).$$

Demostració.

A partir de la inclusió entre intervals reals

$$f^{*}(\text{ProjReal}(\mathfrak{X})) \subseteq f^{**}(\text{ProjReal}(\mathfrak{X})).$$

Lema 3.62 *Sigui* $f_{\mathbb{M}(t,\infty)} : \mathbb{M}^k \to \mathbb{M}$ *una funció de marques associada a la funció racional i contínua* $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$. *Donat* $\mathfrak{X} \in I^*\left(\mathbb{M}^k\right)$ *que expressem per* $\mathfrak{X} = (\mathfrak{X}_1, \mathfrak{X}_2)$, *separant les components en dos tipus, es compleix que*

$$\max_{X_1, \mathfrak{X}'_1} \min_{X_2, \mathfrak{X}'_2} f_{\mathbb{M}(t,\infty)}(X) \leq \min_{X_2, \mathfrak{X}'_2} \max_{X_1, \mathfrak{X}'_1} f_{\mathbb{M}(t,\infty)}(X).$$

[7] Aquest valor $\xi(\alpha)$ es determina en la demostració.

Demostració.

Construïm les funcions

$$g_{\mathbb{M}(t,\infty)}(X_1) := \min_{X_2,\mathfrak{X}_2'} f_{\mathbb{M}(t,\infty)}(X_1, X_2)$$

i

$$h_{\mathbb{M}(t,\infty)}(X_2) := \max_{X_1,\mathfrak{X}_1'} f_{\mathbb{M}(t,\infty)}(X_1, X_2)$$

de les quals s'obté

$$U(X_1, \mathfrak{X}_1')\, U(X_2, \mathfrak{X}_2')\;\; g_{\mathbb{M}(t,\infty)}(X_1) \leq f_{\mathbb{M}(t,\infty)}(X_1, X_2) \leq h_{\mathbb{M}(t,\infty)}(X_2).$$

Observació.

Existeix la possibilitat de preguntar-se si és possible un resultat com el que hem demostrat utilitzant relacions dèbils. De voler-ho fer, seria necessari definir operadors max i min relacionats amb aquelles. La no transitivitat dificultaria el seu càlcul.

Lema 3.63 *Siguin* $F_{1\mathbb{M}(t,n)}, F_{2\mathbb{M}(t,n)} : \mathbb{M}(t,n) \to I^*(\mathbb{M}(t,n))$. *Donats* $\alpha \in]0,1]$ *i* $\mathfrak{X} \in I^*(\mathbb{M}(t,n))$, *es compleix que*

$$U(X, \mathfrak{X}')\;\; F_{1\mathbb{M}(t,n)}(X) \subseteq_\alpha F_{2\mathbb{M}(t,n)}(X) \Rightarrow \underset{X,\mathfrak{X}}{\Omega} F_{1\mathbb{M}(t,n)}(X) \subseteq_\alpha \underset{X,\mathfrak{X}}{\Omega} F_{2\mathbb{M}(t,n)}(X).$$

Demostració.

1. Si $\mathfrak{X}$ és propi,

$$\begin{aligned}
\underset{X,\mathfrak{X}}{\Omega} F_{1\mathbb{M}(t,n)}(X) = &\; \underset{X,\mathfrak{X}'}{\vee} F_{1\mathbb{M}(t,n)}(X) = \\
= &\; \left[\min_{X,\mathfrak{X}'} \inf\left(F_{1\mathbb{M}(t,n)}(X)\right), \max_{X,\mathfrak{X}'} \sup\left(F_{1\mathbb{M}(t,n)}(X)\right)\right] \subseteq_\alpha \\
\subseteq_\alpha &\; \left[\min_{X,\mathfrak{X}'} \inf\left(F_{2\mathbb{M}(t,n)}(X)\right), \max_{X,\mathfrak{X}'} \sup\left(F_{2\mathbb{M}(t,n)}(X)\right)\right] = \\
= &\; \underset{X,\mathfrak{X}'}{\vee} F_{2\mathbb{M}(t,n)}(X) = \underset{X,\mathfrak{X}}{\Omega} F_{2\mathbb{M}(t,n)}(X)
\end{aligned}$$

2. Si $\mathfrak{X}$ és impropi per dualitat queda demostrat.

Lema 3.64

Sigui $F_{\mathbb{M}(t,n)} : \mathbb{M}(t,n) \to I^*(\mathbb{M}(t,n))$. *Donats* $\mathfrak{X}_1, \mathfrak{X}_2 \in I^*(\mathbb{M}(t,n))$, *es compleix que*

$$\mathfrak{X}_1 \subseteq \mathfrak{X}_2 \Rightarrow \underset{X,\mathfrak{X}_1}{\Omega} F_{\mathbb{M}(t,n)}(X) \subseteq \underset{X,\mathfrak{X}_2}{\Omega} F_{\mathbb{M}(t,n)}(X).$$

Demostració◦

1. Si $\mathfrak{X}_1$ és propi,

▷ Si $\mathfrak{X}_2$ és propi, $\mathfrak{X}_1' \subseteq \mathfrak{X}_2'$ i així

$$\underset{X,\mathfrak{X}_1}{\Omega} F_{\mathbb{M}(t,n)}(X) = \underset{X,\mathfrak{X}_1'}{\vee} F_{\mathbb{M}(t,n)}(X) =$$

$$= \left[\min_{X,\mathfrak{X}_1'} \inf\left(F_{\mathbb{M}(t,n)}(X)\right), \max_{X,\mathfrak{X}_1'} \sup\left(F_{\mathbb{M}(t,n)}(X)\right)\right] \subseteq$$

$$\subseteq \left[\min_{X,\mathfrak{X}_2'} \inf\left(F_{\mathbb{M}(t,n)}(X)\right), \max_{X,\mathfrak{X}_2'} \sup\left(F_{\mathbb{M}(t,n)}(X)\right)\right] =$$

$$= \underset{X,\mathfrak{X}_2'}{\vee} F_{\mathbb{M}(t,n)}(X) = \underset{X,\mathfrak{X}_2}{\Omega} F_{\mathbb{M}(t,n)}(X).$$

▷ Si $\mathfrak{X}_2$ és impropi, $\mathfrak{X}_1 = \mathfrak{X}_2 = [\langle a,g\rangle, \langle a,g\rangle]$ i per tant, $\underset{X,[\langle a,g\rangle,\langle a,g\rangle]}{\Omega}$ es redueix a l'operador identitat.

2. Si $\mathfrak{X}_1$ és impropi,

$$\underset{X,\mathfrak{X}_1}{\Omega} F_{\mathbb{M}(t,n)}(X) = \underset{X,\mathfrak{X}_1'}{\wedge} F_{\mathbb{M}(t,n)}(X) =$$
$$= \left[\max_{X,\mathfrak{X}_1'} \inf\left(F_{\mathbb{M}(t,n)}(X)\right), \min_{X,\mathfrak{X}_1'} \sup\left(F_{\mathbb{M}(t,n)}(X)\right)\right].$$

▷ Si $\mathfrak{X}_2$ és propi, de la inclusió $\mathfrak{X}_1 \subseteq \mathfrak{X}_2$ es dedueix $\mathfrak{X}_1' \cap \mathfrak{X}_2' \neq \emptyset$. Sigui $\hat{X} \in \mathfrak{X}_1' \cap \mathfrak{X}_2'$

$$\max_{X,\mathfrak{X}_1'} \inf\left(F_{\mathbb{M}(t,n)}(X)\right) \geq \inf\left(F_{\mathbb{M}(t,n)}\left(\hat{X}\right)\right) \geq \min_{X,\mathfrak{X}_2'} \inf\left(F_{\mathbb{M}(t,n)}(X)\right)$$

$$\min_{X,\mathfrak{X}_1'} \sup\left(F_{\mathbb{M}(t,n)}(X)\right) \leq \sup\left(F_{\mathbb{M}(t,n)}\left(\hat{X}\right)\right) \leq \max_{X,\mathfrak{X}_2'} \sup\left(F_{\mathbb{M}(t,n)}(X)\right)$$

▷ Si $\mathfrak{X}_2$ és impropi, la inclusió $\mathfrak{X}_1 \subseteq \mathfrak{X}_2$ és equivalent a $\mathfrak{X}_2' \subseteq \mathfrak{X}_1'$ i es verifica

$$\max_{X,\mathfrak{X}_1'} \inf\left(F_{\mathbb{M}(t,n)}(X)\right) \geq \inf\left(F_{\mathbb{M}(t,n)}\left(\hat{X}\right)\right) \geq \min_{X,\mathfrak{X}_2'} \inf\left(F_{\mathbb{M}(t,n)}(X)\right)$$

$$\min_{X,\mathfrak{X}_1'} \sup\left(F_{\mathbb{M}(t,n)}(X)\right) \leq \sup\left(F_{\mathbb{M}(t,n)}\left(\hat{X}\right)\right) \leq \max_{X,\mathfrak{X}_2'} \sup\left(F_{\mathbb{M}(t,n)}(X)\right)$$

Teorema 3.65 *Siguin* $F_{1\mathbb{M}(t,n)}, F_{2\mathbb{M}(t,n)} : \mathbb{M}(t,n) \to I^*(\mathbb{M}(t,n))$*. Donats* $\mathfrak{X}_1, \mathfrak{X}_2 \in I^*(\mathbb{M}(t,n))$*, si* $\alpha \in]0,1]$ *es compleix*

$$\mathfrak{X}_1 \subseteq \mathfrak{X}_2, F_{1\mathbb{M}(t,n)}(X) \subseteq_\alpha F_{2\mathbb{M}(t,n)}(X) \Rightarrow \underset{X,\mathfrak{X}_1}{\Omega} F_{1\mathbb{M}(t,n)}(X) \subseteq_\alpha \underset{X,\mathfrak{X}_2}{\Omega} F_{2\mathbb{M}(t,n)}(X),$$

sempre que α *validi els intervals* $\underset{X,\mathfrak{X}_1}{\Omega} F_{1\mathbb{M}(t,n)}(X)$ *i* $\underset{X,\mathfrak{X}_2}{\Omega} F_{2\mathbb{M}(t,n)}(X)$*.*

Demostració.

Aplicant el lema 3.64

$$\mathfrak{X}_1 \subseteq \mathfrak{X}_2 \Rightarrow \underset{X,\mathfrak{X}_1}{\Omega} F_{1\mathbb{M}(t,n)}(X) \subseteq \underset{X,\mathfrak{X}_2}{\Omega} F_{1\mathbb{M}(t,n)}(X),$$

i utilitzant el lema 3.63

$$U(X,\mathfrak{X}_2')\ F_{1\mathbb{M}(t,n)}(X) \subseteq_\alpha F_{2\mathbb{M}(t,n)}(X) \Rightarrow \underset{X,\mathfrak{X}_2}{\Omega} F_{1\mathbb{M}(t,n)}(X) \subseteq_\alpha \underset{X,\mathfrak{X}_2}{\Omega} F_{2\mathbb{M}(t,n)}(X),$$

resulta

$$\underset{X,\mathfrak{X}_1}{\Omega} F_{1\mathbb{M}(t,n)}(X) \subseteq \underset{X,\mathfrak{X}_2}{\Omega} F_{1\mathbb{M}(t,n)}(X) \subseteq_\alpha \underset{X,\mathfrak{X}_2}{\Omega} F_{2\mathbb{M}(t,n)}(X).$$

Per transitivitat

$$\underset{X,\mathfrak{X}_1}{\Omega} F_{1\mathbb{M}(t,n)}(X) \subseteq_\alpha \underset{X,\mathfrak{X}_2}{\Omega} F_{2\mathbb{M}(t,n)}(X).$$

Teorema 3.66 *Sigui* $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ *racional i contínua. Donats* $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y} \in I^*\left(\mathbb{M}(t,n)^k\right)$ *es compleix*

$$\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{Y} \Rightarrow \left(f^*_{\mathbb{M}(t,\infty)}(\mathfrak{X}) \subseteq f^*_{\mathbb{M}(t,\infty)}(\mathfrak{Y})\ ,\ f^{**}_{\mathbb{M}(t,\infty)}(\mathfrak{X}) \subseteq f^{**}_{\mathbb{M}(t,\infty)}(\mathfrak{Y})\right).$$

Demostració.

$$\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{Y} \Rightarrow ProjReal(\mathfrak{X}) \subseteq ProjReal(\mathfrak{Y});$$

i utilitzant les propietats de les funcions semàntiques f^* i f^{**} sobre intervals reals (vegeu [33, sec 2.5]) es complirà

$$f^*(ProjReal(\mathfrak{X})) \subseteq f^*(ProjReal(\mathfrak{Y}))$$

i per tant,

$$f^*_{\mathbb{M}(t,\infty)}(\mathfrak{X}) \subseteq f^*_{\mathbb{M}(t,\infty)}(\mathfrak{Y}).$$

De la mateixa forma

$$f^{**}(ProjReal(\mathfrak{X})) \subseteq f^{**}(ProjReal(\mathfrak{Y}))$$

i així

$$f^{**}_{\mathbb{M}(t,\infty)}(\mathfrak{X}) \subseteq f^{**}_{\mathbb{M}(t,\infty)}(\mathfrak{Y}).$$

Definició 3.67 ***(Conjunt de punts de sella)***
Si $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ *és una funció contínua, donat* $\mathfrak{X} \in I^*\left(\mathbb{M}^k\right)$ *amb* $\mathfrak{X}' = (\mathfrak{X}'_1, \mathfrak{X}'_2) \in I\left(\mathbb{M}^k\right)$*, definim el* ***conjunt de punts de sella*** *en* $(\mathfrak{X}'_1, \mathfrak{X}'_2)$ *de les funcions de marques associades a* f*, i el representem per* $Sdp\left(f_{\mathbb{M}}, \mathfrak{X}'_1, \mathfrak{X}'_2\right)$ *a partir del conjunt de punts de sella de la funció* f *en* $ProjReal(\mathfrak{X}'_1, \mathfrak{X}'_2)$[8] *com*

$$Sdp\left(f_{\mathbb{M}}, \mathfrak{X}'_1, \mathfrak{X}'_2\right) := \left\{\left(X_1^m, X_2^M\right) := \left(\langle x_1^m, g_1\rangle, \left\langle x_2^M, g_2\right\rangle\right) \in (\mathfrak{X}'_1, \mathfrak{X}'_2) \quad | \right.$$
$$\left. \left(x_1^m, x_2^M\right) \in Sdp\left(f,\ ProjReal\left(\mathfrak{X}'_1, \mathfrak{X}'_2\right)\right)\right\}.$$

Definició 3.68 ***(Valor de sella)***
Si $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ *és una funció contínua, donat* $\mathfrak{X} \in I^*\left(\mathbb{M}^k\right)$ *amb* $\mathfrak{X}' = (\mathfrak{X}'_1, \mathfrak{X}'_2)$*, definim el* ***valor de sella*** *en* $(\mathfrak{X}'_1, \mathfrak{X}'_2)$ *de la funció de marques* $f_{\mathbb{M}} : \mathbb{M}(t,n)^k \to \mathbb{M}(t,n)$ *associada a* f *i el representem per* $Sdv\left(f_{\mathbb{M}}, \mathfrak{X}'_1, \mathfrak{X}'_2\right)$ *com*

$$Sdv\left(f_{\mathbb{M}}, \mathfrak{X}'_1, \mathfrak{X}'_2\right) := \begin{cases} f_{\mathbb{M}}\left(X_1^m, X_2^M\right) & si \ \left(X_1^m, X_2^M\right) \in Sdp\left(f_{\mathbb{M}}, \mathfrak{X}'_1, \mathfrak{X}'_2\right) \\ \\ no \ definit & si \ Sdp\left(f_{\mathbb{M}}, \mathfrak{X}'_1, \mathfrak{X}'_2\right) = \emptyset. \end{cases}$$

Lema 3.69 *Sota les condicions de les definicions 3.67 i 3.68, si* $\left(X_1^m, X_2^M\right)$ *és un punt de sella de les funcions* $f_{\mathbb{M}}$ *associades a* f *en* $(\mathfrak{X}'_1, \mathfrak{X}'_2)$*, es verifica*

1. $$\min_{X_1, \mathfrak{X}'_1} \max_{X_2, \mathfrak{X}'_2} f_{\mathbb{M}(t,\infty)}\left(X_1, X_2\right) = f_{\mathbb{M}(t,\infty)}\left(X_1^m, X_2^M\right) = \max_{X_2, \mathfrak{X}'_2} \min_{X_1, \mathfrak{X}'_1} f_{\mathbb{M}(t,\infty)}\left(X_1, X_2\right).$$

2. *Sota un criteri maximalista del càlcul de la granularitat,*
$$Sdv\left(f_{\mathbb{M}(t,n)}, \mathfrak{X}'_1, \mathfrak{X}'_2\right) \approx_\alpha f_{\mathbb{M}(t,\infty)}\left(X_1^m, X_2^M\right),$$
si les granularitats resultants són compatibles amb αt*.*

[8] que representem per $Sdp\left(f, ProjReal\left(\mathfrak{X}'_1, \mathfrak{X}'_2\right)\right)$ i que es defineix com

$$\left(\tilde{x}_1^m, \tilde{x}_2^M\right) \in Sdp\left(f,\ \mathrm{ProjReal}\left(\mathfrak{X}'_1, \mathfrak{X}'_2\right)\right) \ \text{quan}$$

$$U\left(x_1, \mathrm{ProjReal}\left(\mathfrak{X}'_1\right)\right) U\left(x_2, \mathrm{ProjReal}\left(\mathfrak{X}'_2\right)\right) \left(f\left(\tilde{x}_1^m, x_2\right) \le f\left(\tilde{x}_1^m, \tilde{x}_2^M\right) \le f\left(x_1, \tilde{x}_2^M\right)\right).$$

Demostració.

1. A partir de

$$\begin{aligned}\min_{X_1,\mathfrak{X}'_1}\max_{X_2,\mathfrak{X}'_2} f_{\mathbb{M}(t,\infty)}(X_1,X_2) \leq & \max_{X_2,\mathfrak{X}'_2} f_{\mathbb{M}(t,\infty)}(X_1^m,X_2) = \\ = & f_{\mathbb{M}(t,\infty)}\left(X_1^m,X_2^M\right) = \\ = & \min_{X_1,\mathfrak{X}'_1} f_{\mathbb{M}(t,\infty)}\left(X_1,X_2^M\right) \leq \\ \leq & \max_{X_2,\mathfrak{X}'_2}\min_{X_1,\mathfrak{X}'_1} f_{\mathbb{M}(t,\infty)}(X_1,X_2)\end{aligned}$$

   i utilitzant la desigualtat vista en en lema 3.62, queda demostrada la igualtat.

2. $Sdv\left(f_{\mathbb{M}(t,n)},\mathfrak{X}'_1,\mathfrak{X}'_2\right) = f_{\mathbb{M}(t,n)}\left(X_1^m,X_2^M\right) \approx_\alpha f_{\mathbb{M}(t,\infty)}\left(X_1^m,X_2^M\right).$

Teorema 3.70 ***(Conmutativitat Join-Meet)***
Si $f_{\mathbb{M}}:\mathbb{M}^k\to\mathbb{M}$ és una funció de marques associada a la funció contínua $f:\mathbb{R}^k\to\mathbb{R}$, donat $\mathfrak{X}\in I^*\left(\mathbb{M}^k\right)$, que separem en components propis i impropis de la forma $\mathfrak{X}=(\mathfrak{X}_p,\mathfrak{X}_i)$, es compleix que

$$\left.\begin{array}{l} Sdp\left(f_{\mathbb{M}},\mathfrak{X}'_p,\mathfrak{X}'_i\right)\neq\emptyset \\ Sdp\left(f_{\mathbb{M}},\mathfrak{X}'_i,\mathfrak{X}'_p\right)\neq\emptyset\end{array}\right\}\Leftrightarrow f^*_{\mathbb{M}(t,\infty)}(\mathfrak{X}) = f^{**}_{\mathbb{M}(t,\infty)}(\mathfrak{X}).$$

Demostració.
Utilitzant la definició de punt de sella podem afirmar

$$\left\{\begin{array}{l} Sdp\left(f_{\mathbb{M}},\mathfrak{X}'_p,\mathfrak{X}'_i\right)\neq\emptyset \\ Sdp\left(f_{\mathbb{M}},\mathfrak{X}'_i,\mathfrak{X}'_p\right)\neq\emptyset\end{array}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l} Sdp\left(f,\mathrm{ProjReal}\left(\mathfrak{X}'_p,\mathfrak{X}'_i\right)\right)\neq\emptyset \\ Sdp\left(f,\mathrm{ProjReal}\left(\mathfrak{X}'_i,\mathfrak{X}'_p\right)\right)\neq\emptyset\end{array}\right\}.$$

Aplicant aquest fet a les funcions $*$ i $**$ semàntiques

$$\begin{aligned} f^*_{\mathbb{M}(t,\infty)}(\mathfrak{X}) &= \langle f^*(\mathrm{ProjReal}(\mathfrak{X})), g_f\rangle \\ f^{**}_{\mathbb{M}(t,\infty)}(\mathfrak{X}) &= \langle f^{**}(\mathrm{ProjReal}(\mathfrak{X})), g_f\rangle,\end{aligned}$$

podem afirmar (Vegeu [33, Lema 2.5.4])

$$f^*(\mathrm{ProjReal}(\mathfrak{X})) = f^{**}(\mathrm{ProjReal}(\mathfrak{X}))$$

i per tant,

$$f^*_{\mathbb{M}(t,\infty)}(\mathfrak{X}) = f^{**}_{\mathbb{M}(t,\infty)}(\mathfrak{X}).$$

Definició 3.71 ***(Funció JM-conmutativa)***

Direm que les funcions de marques associades a una funció contínua $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$*, són* ***JM-conmutatives*** *sobre* $\mathfrak{X} \in I^*\left(\mathbb{M}^k\right)$*, quan es compleixi*

$$f^*_{\mathbb{M}(t,\infty)}(\mathfrak{X}) = f^{**}_{\mathbb{M}(t,\infty)}(\mathfrak{X}).$$

Teorema 3.72 *Sota les condicions enunciades en la definició 3.71, per una funció de marques* $f_{\mathbb{M}(t,n)}$ *JM-conmutativa sobre* $\mathfrak{X} \in I^*\left(\mathbb{M}^k\right)$*, es compleix*

$$f^*_{\mathbb{M}(t,\infty)}(\mathfrak{X}) = f^{**}_{\mathbb{M}(t,\infty)}(\mathfrak{X}) =$$
$$= \left\langle \left[Sdv\left(f_{\mathbb{M}(t,\infty)}, \mathfrak{X}'_p, \mathfrak{X}'_i\right), Sdv\left(f_{\mathbb{M}(t,\infty)}, \mathfrak{X}'_i, \mathfrak{X}'_p\right)\right], g_f \right\rangle.$$

Demostració.

A partir del resultat intervalar (vegeu [33, Teorema 2.5.4])

$$f^*(\text{ProjReal}(\mathfrak{X})) =$$
$$= \left[Sdv\left(f, \text{ProjReal}\left(\mathfrak{X}'_p\right), \text{ProjReal}\left(\mathfrak{X}'_i\right)\right), Sdv\left(f, \text{ProjReal}\left(\mathfrak{X}'_i\right), \text{ProjReal}\left(\mathfrak{X}'_p\right)\right)\right].$$

3.2.5 Funcions racionals modals

Definició 3.73 ***(∗−extensió racional modal)***

Si $f_{\mathbb{M}} : \mathbb{M}^k \to \mathbb{M}$ *és una funció de marques associada a la funció contínua* $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$*, la seva* ***∗-extensió racional modal*** *sobre intervals de marques la representem per* $f_{\mathbb{M}}R^*$*, i la definim com la funció* $f_{\mathbb{M}}R^* : I^*\left(\mathbb{M}^k\right) \to I^*(\mathbb{M})$ *en la qual cada operador entre marques de l'arbre sintàctic que forma la funció* $f_{\mathbb{M}}$ *és substituït per la seva ∗− extensió semàntica*[9]*.*

Definició 3.74 ***(∗∗−extensió racional modal)***

Si $f_{\mathbb{M}} : \mathbb{M}^k \to \mathbb{M}$ *és una funció de marques associada a la funció contínua* $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$*, la seva* ***∗∗-extensió racional modal*** *sobre intervals de marques la representem per* $f_{\mathbb{M}}R^{**}$*, i la definim com aquella funció* $f_{\mathbb{M}}R^{**} : I^*\left(\mathbb{M}^k\right) \to I^*(\mathbb{M})$ *en què cada operador entre marques de l'arbre sintàctic que forma la funció* $f_{\mathbb{M}}$ *és substituït per la seva ∗∗− extensió semàntica.*

Lema 3.75 *Si* $f_{\mathbb{M}} : \mathbb{M}^k \to \mathbb{M}$ *és una funció de marques associada a* f*,* $f_{\mathbb{M}}R^*$ *i* $f_{\mathbb{M}}R^{**}$ *són les ∗ i ∗∗ extensions racionals modals sobre intervals de marques, aleshores*

$$dual(f_{\mathbb{M}}R^*(\mathfrak{X})) = f_{\mathbb{M}}R^{**}(dual(\mathfrak{X})).$$

[9] Està, per tant, definida sobre $n = \infty$. A partir d'ara obviarem el valor d'n quan valgui ∞, en referir-nos a les extensions ∗ i ∗∗ semàntiques.

Demostració.

Representem per $\Psi_{\mathbb{M}}$ l'arbre sintàctic d'$f_{\mathbb{M}}$ i per $\omega_{\mathbb{M}i}$ els seus operadors. Aleshores

$$\begin{aligned}\operatorname{dual}\left(f_{\mathbb{M}}R^{*}\left(\mathfrak{X}\right)\right) = & \operatorname{dual}\left(\Psi_{\mathbb{M}}\left(\omega^{*}_{\mathbb{M}i}, X\right)\right) = \\ = & \Psi_{\mathbb{M}}\left(\omega^{**}_{\mathbb{M}i}, \operatorname{dual}\left(X\right)\right) = \\ = & f_{\mathbb{M}}R^{**}\left(\operatorname{dual}\left(\mathfrak{X}\right)\right).\end{aligned}$$

Definició 3.76 ***(Uniincidència i multiincidència)***

*Si $f_{\mathbb{M}} : \mathbb{M}^{k} \to \mathbb{M}$ és la funció de marques associada a f, diem que un component X_i d'$X = (X_1, \ldots, X_k)$ és **uniincident** en $f_{\mathbb{M}}$ quan ocupi únicament una fulla en l'arbre sintàctic de la funció $f_{\mathbb{M}}$. En cas contrari diem que X_i és **multiincident** en $f_{\mathbb{M}}$.*

Lema 3.77 ***(Interpretabilitat dels esglaons racionals)***

Si $\mathfrak{G}_i, \mathfrak{X}, \mathfrak{Y} \in I_e\left(\mathbb{M}\right)$, $\mathfrak{H}_j, \mathfrak{U}, \mathfrak{V} \in I_u\left(\mathbb{M}\right), \mathfrak{Z} \in I^{*}\left(\mathbb{M}\right)$ i $f_{\mathbb{M}}, g_{i\mathbb{M}}, h_{j\mathbb{M}}$ són funcions de marques associades a les corresponents funcions reals, tals que $f^{*}_{\mathbb{M}}\left(\mathfrak{G}_i, \mathfrak{H}_j\right) \subseteq \mathfrak{Z}$,$g^{*}_{i\mathbb{M}}\left(\mathfrak{X}, \mathfrak{U}\right) \subseteq \mathfrak{G}_i$, $h^{*}_{j\mathbb{M}}\left(\mathfrak{Y}, \mathfrak{V}\right) \subseteq \mathfrak{H}_j$ i els components de U i V corresponents als vectors universals $\mathfrak{U}$ i $\mathfrak{V}$ no tenen components comuns en $g^{*}_{i\mathbb{M}}$ i $h^{*}_{j\mathbb{M}}$, si definim

$$f_{\mathbb{M}} \circ \left(g_{\mathbb{M}}, h_{\mathbb{M}}\right)\left(X, Y, U, V\right) := f_{\mathbb{M}}\left(g_{i\mathbb{M}}\left(X, U\right), h_{j\mathbb{M}}\left(Y, V\right)\right),$$

es compleix que

$$\left(f_{\mathbb{M}} \circ \left(g_{\mathbb{M}}, h_{\mathbb{M}}\right)\right)^{*}\left(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{U}, \mathfrak{V}\right) \subseteq \mathfrak{Z}.$$

Demostració.

D'acord amb el teorema $*-$semàntic (Teorema 3.57) es compleix

$$\begin{aligned}& f^{*}_{\mathbb{M}}\left(\mathfrak{A}\right) \subseteq F_{\mathbb{M}}\left(\mathfrak{A}\right) \\ & U\left(a_p, \operatorname{ProjReal}\left(\mathfrak{A}'_p\right)\right) Q\left(z, \operatorname{ProjReal}\left(F_{\mathbb{M}}\left(\mathfrak{A}\right)\right)\right) \\ & \qquad E\left(a_i, \operatorname{ProjReal}\left(\mathfrak{A}'_i\right)\right)\left(z = f\left(a_p, a_i\right)\right)\end{aligned}$$

a) $h^{*}_{j\mathbb{M}}\left(\mathfrak{Y}, \mathfrak{V}\right) \subseteq \mathfrak{H}_j \Leftrightarrow U\left(y, \operatorname{ProjReal}\left(\mathfrak{Y}'\right)\right) U\left(h_j, \operatorname{ProjReal}\left(\mathfrak{H}'_j\right)\right)$
$E\left(v, \operatorname{ProjReal}\left(\mathfrak{V}'\right)\right)\left(h_j = h_j\left(y, v\right)\right)$.

b) $g^{*}_{i\mathbb{M}}\left(\mathfrak{X}, \mathfrak{U}\right) \subseteq \mathfrak{G}_i \Leftrightarrow U\left(x, \operatorname{ProjReal}\left(\mathfrak{X}'\right)\right) E\left(g_i, \operatorname{ProjReal}\left(\mathfrak{G}'_j\right)\right)$
$E\left(u, \operatorname{ProjReal}\left(\mathfrak{U}'\right)\right)\left(g_i = g_i\left(x, u\right)\right)$.

c) $f^{*}_{\mathbb{M}}\left(\mathfrak{G}_i, \mathfrak{H}_j\right) \subseteq \mathfrak{Z} \Leftrightarrow U\left(g_i, \operatorname{ProjReal}\left(\mathfrak{G}'_i\right)\right) Q\left(z, \operatorname{ProjReal}\left(\mathfrak{Z}\right)\right)$
$E\left(h_j, \operatorname{ProjReal}\left(\mathfrak{H}'_j\right)\right)\left(z = f\left(g_i, h_j\right)\right)$.

A partir de b) i de c) resulta

$$U\left(x,\text{ProjReal}\left(\mathfrak{X}'\right)\right)Q\left(z,\text{ProjReal}\left(\mathfrak{Z}\right)\right)E\left(g_i,\text{ProjReal}\left(\mathfrak{G}'_j\right)\right)$$

$$E\left(h_j,\text{ProjReal}\left(\mathfrak{H}'_j\right)\right)E\left(u,\text{ProjReal}\left(\mathfrak{U}'\right)\right)$$

$$z=f\left(g_i,h_j\right),g_i=g_i\left(x,u\right)$$

i juntament amb a) s'obté

$$U\left(y,\text{ProjReal}\left(\mathfrak{Y}'\right)\right)U\left(x,\text{ProjReal}\left(\mathfrak{X}'\right)\right)Q\left(z,\text{ProjReal}\left(\mathfrak{Z}\right)\right)$$

$$E\left(g_i,\text{ProjReal}\left(\mathfrak{G}'_j\right)\right)E\left(h_j,\text{ProjReal}\left(\mathfrak{H}'_j\right)\right)E\left(u,\text{ProjReal}\left(\mathfrak{U}'\right)\right)$$

$$E\left(v,\text{ProjReal}\left(\mathfrak{V}'\right)\right)\ z=f\left(g_i,h_j\right),g_i=g_i\left(x,u\right),h_j=h_j\left(y,v\right),$$

que és equivalent a

$$U\left(y,\text{ProjReal}\left(\mathfrak{Y}'\right)\right)U\left(x,\text{ProjReal}\left(\mathfrak{X}'\right)\right)Q\left(z,\text{ProjReal}\left(\mathfrak{Z}\right)\right)$$

$$E\left(u,\text{ProjReal}\left(\mathfrak{U}'\right)\right)E\left(v,\text{ProjReal}\left(\mathfrak{V}'\right)\right)\ z=f\left(g_i\left(x,u\right),h_j\left(y,v\right)\right).$$

A partir del teorema $*-$semàntic es té

$$\left(f_{\mathbb{M}}\circ\left(g_{\mathbb{M}},h_{\mathbb{M}}\right)\right)^*\left(\mathfrak{X},\mathfrak{Y},\mathfrak{U},\mathfrak{V}\right)\subseteq\mathfrak{Z}.$$

Teorema 3.78 ***($*-$interpretabilitat de les funcions racionals)***

Si $f_{\mathbb{M}}:\mathbb{M}^k\to\mathbb{M}$ és una funció de marques associada a la funció contínua $f:\mathbb{R}^k\to\mathbb{R}$ i $\mathfrak{X}\in I^*\left(\mathbb{M}^k\right)$ és un interval de marques en què tots els components impròpis són uniincidents en $f_{\mathbb{M}}R^*\left(\mathfrak{X}\right)$, si existeix $f_{\mathbb{M}}R^*\left(prop\left(\mathfrak{X}\right)\right)$, es verifica

$$f^*_{\mathbb{M}}\left(\mathfrak{X}\right)\subseteq f_{\mathbb{M}}R^*\left(\mathfrak{X}\right).$$

Demostració.

Com que $f_{\mathbb{M}}$ és composició dels seus operadors, podem aplicar el lema 3.77, que no es veu afectat per les multiincidències dels components pròpis d'$\mathfrak{X}$.

Teorema 3.79 ***($**-$interpretabilitat de les funcions racionals)***

Si $f_{\mathbb{M}}:\mathbb{M}^k\to\mathbb{M}$ és una funció de marques associada a la funció contínua $f:\mathbb{R}^k\to\mathbb{R}$ i $\mathfrak{X}\in I^*\left(\mathbb{M}^k\right)$ és un interval de marques en què tots els components pròpis són uniincidents en $f_{\mathbb{M}}R^{**}\left(\mathfrak{X}\right)$, si existeix $f_{\mathbb{M}}R^{**}\left(prop\left(\mathfrak{X}\right)\right)$, aleshores es verifica

$$f_{\mathbb{M}}R^{**}\left(\mathfrak{X}\right)\subseteq f^{**}_{\mathbb{M}}\left(\mathfrak{X}\right).$$

Demostració.

És el cas dual del teorema 3.78

Definició 3.80 ***(Operador racional)***

Una funció $f_{\mathbb{M}} : \mathbb{M}^k \to \mathbb{M}$ *direm que és un* ***operador racional*** *sobre* $\mathfrak{X} \in I^*\left(\mathbb{M}^k\right)$*, quan sigui JM-commutativa sobre* $\mathfrak{X}$*; és a dir, es compleixi*

$$f^*_{\mathbb{M}}(\mathfrak{X}) = f^{**}_{\mathbb{M}}(\mathfrak{X}).$$

Ens referirem a operador racional sobre intervals de marques, quan per tot $\mathfrak{X} \in I^*\left(\mathbb{M}^k\right)$*,* $f_{\mathbb{M}}$ *sigui JM-commutativa sobre* $\mathfrak{X}$*.*

Teorema 3.81 *Si* $f_{\mathbb{M}(t,n)} : \mathbb{M}^k \to \mathbb{M}$ *és un operador racional sobre* $\mathfrak{X} \in I^*\left(\mathbb{M}^k\right)$*, sota un criteri maximalista del càlcul de la granularitat, es compleix que*

$$f^*_{\mathbb{M}}(\mathfrak{X}) = f^{**}_{\mathbb{M}}(\mathfrak{X}) \approx_\alpha \left\langle \left[Sdv\left(f_{\mathbb{M}(t,n)}, \mathfrak{X}'_p, \mathfrak{X}'_i\right), Sdv\left(f_{\mathbb{M}(t,n)}, \mathfrak{X}'_i, \mathfrak{X}'_p\right)\right], g_f \right\rangle$$

sempre que les marques siguin compatibles amb αt*.*

Demostració.

Pel fet de ser $f_{\mathbb{M}(t,n)}$ un operador racional, i aplicant el teorema 3.72, es té

$$f^*_{\mathbb{M}}(\mathfrak{X}) = f^{**}_{\mathbb{M}}(\mathfrak{X}) = \left\langle \left[Sdv\left(f_{\mathbb{M}(t,\infty)}, \mathfrak{X}'_p, \mathfrak{X}'_i\right), Sdv\left(f_{\mathbb{M}(t,\infty)}, \mathfrak{X}'_i, \mathfrak{X}'_p\right)\right], g \right\rangle.$$

Aplicant a continuació el resultat obtingut en el lema 3.69 si g és compatible amb αt, tindrem

$$Sdv\left(f_{\mathbb{M}(t,\infty)}, \mathfrak{X}'_p, \mathfrak{X}'_i\right) \approx_\alpha Sdv\left(f_{\mathbb{M}(t,n)}, \mathfrak{X}'_p, \mathfrak{X}'_i\right)$$

$$Sdv\left(f_{\mathbb{M}(t,\infty)}, \mathfrak{X}'_i, \mathfrak{X}'_p\right) \approx_\alpha Sdv\left(f_{\mathbb{M}(t,n)}, \mathfrak{X}'_i, \mathfrak{X}'_p\right)$$

i per tant,

$$\begin{aligned} &\left\langle \left[Sdv\left(f_{\mathbb{M}(t,\infty)}, \mathfrak{X}'_p, \mathfrak{X}'_i\right), Sdv\left(f_{\mathbb{M}(t,\infty)}, \mathfrak{X}'_i, \mathfrak{X}'_p\right)\right], g \right\rangle \approx_\alpha \\ &\qquad \approx_\alpha \left\langle \left[Sdv\left(f_{\mathbb{M}(t,n)}, \mathfrak{X}'_p, \mathfrak{X}'_i\right), Sdv\left(f_{\mathbb{M}(t,n)}, \mathfrak{X}'_i, \mathfrak{X}'_p\right)\right], g_f \right\rangle. \end{aligned}$$

Definició 3.82 ***(Operador calculat)***

*Sota les condicions de l'anterior teorema 3.81, si $f_{\mathbb{M}} : \mathbb{M}^k \to \mathbb{M}$ és un operador racional sobre intervals de marques, definim l'**operador calculat** de $f_{\mathbb{M}}$ en $\mathbb{M}(t,n)$ sobre $\mathfrak{X} \in I^*(\mathbb{M}(t,n))$ i el representem per $F_{\mathbb{M}(t,n)}(\mathfrak{X})$ com*

$$F_{\mathbb{M}(t,n)}(\mathfrak{X}) := \left\langle \left[Sdv\left(f_{\mathbb{M}(t,n)}, \mathfrak{X}'_p, \mathfrak{X}'_i\right), Sdv\left(f_{\mathbb{M}(t,n)}, \mathfrak{X}'_i, \mathfrak{X}'_p\right)\right], g_f \right\rangle .$$

Observacions.

1. A partir del que hem exposat, si $\alpha \in \,]0,1]$ i g_f es calcula sota un criteri maximalista i és compatible amb αt, es complirà que

$$f^*_{\mathbb{M}}(\mathfrak{X}) = f^{**}_{\mathbb{M}}(\mathfrak{X}) \approx_\alpha F_{\mathbb{M}(t,n)}(\mathfrak{X}) .$$

2. En ocasions pot ser necessari fer una conversió de l'interval de marques $\mathfrak{X}$ per considerar-lo dins de $I^*(\mathbb{M}(t,n))$, amb el corresponent augment de la granularitat.

Definició 3.83 ***(Funcions racionals modals)***

Sigui $f_{\mathbb{M}} : \mathbb{M}^k \to \mathbb{M}$ una funció de marques associada a la funció contínua $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$.

1. *Quan tots els operadors que formen $f_{\mathbb{M}}$ són racionals, les extensions $f_{\mathbb{M}}R^*$ i $f_{\mathbb{M}}R^{**}$ coincideixen i ens hi referirem com a la **funció racional modal** sobre intervals de marques de $f_{\mathbb{M}}$. La representem per $f_{\mathbb{M}(t,\infty)}R$.*

2. *Si tots els operadors que formen $f_{\mathbb{M}}$ són racionals, definim la **funció racional modal calculada** sobre l'interval de marques $\mathfrak{X} \in I^*(\mathbb{M}(t,n))$ i la representem per $F_{\mathbb{M}(t,n)}R(\mathfrak{X})$, de la mateixa forma que es definien $f_{\mathbb{M}}R^*$ i $f_{\mathbb{M}}R^{**}$ (definicions 3.73 i 3.74) però substituint cada operador entre marques de l'arbre sintàctic de $f_{\mathbb{M}}$, pel seu operador calculat en $\mathbb{M}(t,n)$.*

Teorema 3.84 *Si $f_{\mathbb{M}} : \mathbb{M}^k \to \mathbb{M}$ és una funció de marques associada a la funció contínua $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ de la qual existeixen la funció racional modal $f_{\mathbb{M}(t,\infty)}R$ i la funció racional modal calculada $F_{\mathbb{M}(t,n)}R$ sobre l'interval de marques $\mathfrak{X} \in I^*(\mathbb{M}(t,n))$, es verifica*

$$f_{\mathbb{M}(t,\infty)}R(\mathfrak{X}) \approx_\alpha F_{\mathbb{M}(t,n)}R(\mathfrak{X})$$

sempre que la granularitat resultant del càlcul $F_{\mathbb{M}(t,n)}R(\mathfrak{X})$ hagi estat calculada amb un criteri maximalista i sigui compatible amb αt.

Demostració.

Cada un dels operadors calculats de l'arbre sintàctic compleix aquesta relació i l'augment de la granularitat en cada pas fa que inductivament poguem aplicar aquest procés.

Teorema 3.85 *Sigui* $f_{\mathbb{M}} : \mathbb{M}^k \to \mathbb{M}$ *la funció de marques associada a la funció contínua* $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$. *Si* $f_{\mathbb{M}}R^*$ *i* $f_{\mathbb{M}}R^{**}$ *(i, si s'escau,* $f_{\mathbb{M}(t,\infty)}R$*) són les* $*$ *i* $**$ *extensions racionals modals sobre intervals de marques, donats* $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y} \in I^*\left(\mathbb{M}^k\right)$ *es verifica*

1. $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{Y} \Rightarrow f_{\mathbb{M}}R^*(\mathfrak{X}) \subseteq f_{\mathbb{M}}R^*(\mathfrak{Y})$.
2. $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{Y} \Rightarrow f_{\mathbb{M}}R^{**}(\mathfrak{X}) \subseteq f_{\mathbb{M}}R^{**}(\mathfrak{Y})$.

Demostració.

1. Representem per $\Psi_{\mathbb{M}}$ l'arbre sintàctic d'$f_{\mathbb{M}}$ i per $\omega_{\mathbb{M}i}$ els seus operadors. Aleshores es té

$$\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{Y} \Rightarrow \omega^*_{\mathbb{M}i}(\mathfrak{X}) \subseteq \omega^*_{\mathbb{M}i}(\mathfrak{Y})$$

i per tant,

$$f_{\mathbb{M}}R^*(\mathfrak{X}) = \Psi_{\mathbb{M}}(\omega^*_{\mathbb{M}i}, \mathfrak{X}) \subseteq \Psi_{\mathbb{M}}(\omega^*_{\mathbb{M}i}, \mathfrak{Y}) \subseteq f_{\mathbb{M}}R^*(\mathfrak{Y}).$$

2. De forma anàloga

Corol·lari 3.86 *Sota les condicions del teorema anterior, si tots els operadors de la funció* $f_{\mathbb{M}}$ *són racionals i per tant, podem considerar la funció racional modal* $f_{\mathbb{M}(t,\infty)}R$ *i la funció racional modal calculada* $F_{\mathbb{M}(t,n)}R$*, donats* $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y} \in I^*\left(\mathbb{M}(t,n)^k\right)$ *es verifica*

$$\begin{aligned}\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{Y} \Rightarrow \quad & F_{\mathbb{M}(t,n)}R(\mathfrak{X}) \approx_\alpha f_{\mathbb{M}(t,\infty)}R(\mathfrak{X}) = f_{\mathbb{M}}R^*(\mathfrak{X}) \subseteq \\ & \subseteq f_{\mathbb{M}}R^*(\mathfrak{Y}) = f_{\mathbb{M}(t,\infty)}R(\mathfrak{Y}) \approx_\alpha F_{\mathbb{M}(t,n)}R(\mathfrak{Y}),\end{aligned}$$

sempre que les granularitats que intervenen, calculades sota un criteri maximalista, siguin compatibles amb αt.

Demostració.

Utilitzant els teoremes 3.84 i 3.85.

Teorema 3.87 *Sigui* $f_{\mathbb{M}} : \mathbb{M}^k \to \mathbb{M}$ *una funció de marques associada a la funció contínua* $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ *en la qual tots els operadors que formen el seu arbre sintàctic són racionals. Si en* $f_{\mathbb{M}(t,\infty)}R(\mathfrak{X})$ *tots els arguments són uniincidents, aleshores*

$$f^*_{\mathbb{M}}(\mathfrak{X}) \subseteq f_{\mathbb{M}(t,\infty)}R(\mathfrak{X}) \subseteq f^{**}_{\mathbb{M}}(\mathfrak{X})\,.$$

Demostració.
A partir dels teoremes 3.78 i 3.79.

Corol·lari 3.88 *Sota les condicions dels anteriors teoremes 3.87 i 3.84, si la granularitat resultant del càlcul* $F_{\mathbb{M}(t,n)}R(\mathfrak{X})$ *és compatible amb* αt, *es compleix que*

$$\begin{array}{l} f^*_{\mathbb{M}}(\mathfrak{X}) \subseteq f_{\mathbb{M}(t,\infty)}R(\mathfrak{X}) \approx_\alpha F_{\mathbb{M}(t,n)}R(\mathfrak{X}) \\ i \\ F_{\mathbb{M}(t,n)}R(\mathfrak{X}) \approx_\alpha f_{\mathbb{M}(t,\infty)}R(\mathfrak{X}) \subseteq f^{**}_{\mathbb{M}}(\mathfrak{X})\,. \end{array}$$

Demostració.
Aplicant el teorema 3.84 a les inclusions obtingudes en el teorema 3.87

Corol·lari 3.89 *Sota les hipòtesi del teorema 3.87, si* $f_{\mathbb{M}}$ *és globalment JM-commutativa i la granularitat resultant del càlcul* $F_{\mathbb{M}(t,n)}R(\mathfrak{X})$, *calculada sota un criteri maximalista, sigui compatible amb* αt, *es compleix que*

$$f^*_{\mathbb{M}}(\mathfrak{X}) = f_{\mathbb{M}(t,\infty)}R(\mathfrak{X}) = f^{**}_{\mathbb{M}}(\mathfrak{X}) \approx_\alpha F_{\mathbb{M}(t,n)}R(\mathfrak{X})\,.$$

Demostració.
Utilitzant el teorema 3.87 es té

$$f^*_{\mathbb{M}}(\mathfrak{X}) \subseteq f_{\mathbb{M}(t,\infty)}R(\mathfrak{X}) \subseteq f^{**}_{\mathbb{M}}(\mathfrak{X})$$

i pel fet de ser $f_{\mathbb{M}}$ globalment JM-commutativa, es verificarà

$$f^*_{\mathbb{M}}(\mathfrak{X}) = f^{**}_{\mathbb{M}}(\mathfrak{X})\,,$$

d'on resulta la igualtat

$$f^*_{\mathbb{M}}(\mathfrak{X}) = f_{\mathbb{M}(t,\infty)}R(\mathfrak{X}) = f^{**}_{\mathbb{M}}(\mathfrak{X})\,.$$

D'altra banda, aplicant el teorema 3.84, tenim

$$f_{\mathbb{M}(t,\infty)}R(\mathfrak{X}) \approx_\alpha F_{\mathbb{M}(t,n)}R(\mathfrak{X})\,.$$

Observació. Utilitzant les observacions vistes en 3.2.2, pàg 119, si totes les components d'$\mathfrak{X}$ fossin uniincidents i amb la mateixa modalitat, tindríem

$$f^*_{\mathbb{M}}(\mathfrak{X}) = f_{\mathbb{M}(t,\infty)}R(\mathfrak{X}) = f^{**}_{\mathbb{M}}(\mathfrak{X}) \approx_\alpha F_{\mathbb{M}(t,n)}R(\mathfrak{X})$$

sense necessitat d'imposar que $f_{\mathbb{M}}$ sigui globalment JM-commutativa.

Teorema 3.90 ***(Semàntica de funcions racionals calculades)***
Sigui $F_{\mathbb{M}(t,n)}R : I^*\left(\mathbb{M}(t,n)^k\right) \to I^*(\mathbb{M}(t,n))$ *la funció racional modal calculada i sigui* $fR : I^*\left(\mathbb{R}^k\right) \to I^*(\mathbb{R})$ *la funció racional intervalar ambdues associades a* $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$*. Si* $\left[\underline{X}_1, \overline{X}_1\right], \ldots, \left[\underline{X}_k, \overline{X}_k\right] \in I^*(\mathbb{M}(t,n))$*, i* $\left[\underline{Z}, \overline{Z}\right] = F_{\mathbb{M}(t,n)}R(\mathfrak{X}_1, \ldots, \mathfrak{X}_k)$*, es compleix que*

$$\begin{aligned} U&\left([\underline{z}, \overline{z}], \underline{z} \in Iv'\left(\widetilde{\underline{Z}}\right), \overline{z} \in Iv'\left(\widetilde{\overline{Z}}\right)\right) \\ &E\left([\underline{x}_1, \overline{x}_1], \underline{x}_1 \in Iv'\left(\underline{X}_1, \overline{X}_1\right), \overline{x}_1 \in Iv'\left(\underline{X}_1, \overline{X}_1\right)\right) \\ &\cdots E\left([\underline{x}_k, \overline{x}_k], \underline{x}_k \in Iv'\left(\underline{X}_k, \overline{X}_k\right), \overline{x}_k \in Iv'\left(\underline{X}_k, \overline{X}_k\right)\right) \text{ tals que} \\ &[\underline{z}, \overline{z}] = fR([\underline{x}_1, \overline{x}_1], \ldots, [\underline{x}_k, \overline{x}_k]). \end{aligned}$$

Demostració. A partir de la semàntica de les funcions de marques i tenint en compte que les funcions i els extrems repecte els que calculem $F_{\mathbb{M}(t,n)}R$ i fR són els mateixos.
Observació. Quan es fa la construcció del sistema dels intervals modals reals, a l'hora d'estudiar les extensions racionals, apareix el problema de la optimalitat (vegeu [33, cap 3]) En l'estudi que acabem de fer, no hem tractat aquest problema ja que no té importància analitzar-lo des del punt de vista dels intervals de marques, perquè l'optimalitat vindrà resolta per la forma efectiva d'avaluar la funció fR.

3.2.6 Operacions aritmètiques d'intervals de marques

Les operacions que anem a descriure corresponen a les operacions bàsiques entre intervals de marques, entenent com a tals la suma, la diferència, el producte i el quocient.

El procés de construcció de les extensions de funcions de marques, com ha pogut observar-se, és paral·lel al de la construcció de les extensions de funcions contínues reals. Això ens permet concloure que el procés de càlcul d'aquelles operacions entre intervals de marques serà anàleg al de les mateixes operacions entre intervals reals. És per aquest motiu que no dedicarem aquesta subsecció a analitzar detalladament les demostracions que ens porten a aquells processos, sinó que simplement els descriurem.

Donats els intervals de marques $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y} \in I^*(\mathbb{M})$ designant $\mathfrak{X}$ per $\left[\underline{X}, \overline{X}\right]$ i $\mathfrak{Y}$ per $\left[\underline{Y}, \overline{Y}\right]$ on

$$\underline{X} = \langle \underline{x}, g_x \rangle \in \mathbb{M}(t,n,b), \ \overline{X} = \langle \overline{x}, g_x \rangle \in \mathbb{M}(t,n,b)$$

$$\underline{Y} = \left\langle \underline{y}, g_y \right\rangle \in \mathbb{M}(t,n,b), \ \overline{Y} = \langle \overline{y}, g_y \rangle \in \mathbb{M}(t,n,b)$$

tindrem

I- Suma d'intervals de marques

La suma dels intervals $\mathfrak{X}$ i $\mathfrak{Y}$ la representem per $\mathfrak{X} + \mathfrak{Y}$ i és un interval de marques $\mathfrak{Z} \in I^*(\mathbb{M})$ calculat en una escala DI_n de la forma

$$\mathfrak{Z} = \mathfrak{X} + \mathfrak{Y} = \left[\langle \underline{x}, g_x \rangle + \left\langle \underline{y}, g_y \right\rangle, \langle \overline{x}, g_x \rangle + \langle \overline{y}, g_y \rangle\right],$$

on pot ser que calgui fer una coerció d'un dels extrems resultants a la major de les granularitats d'ambdós extrems resultants.

La suma d'intervals de marques és JM-commutativa. Es tracta, per tant, d'un operador racional. L'expressió donada pel seu càlcul podem fer-la a partir del punts i valors de sella o directament a partir de les extensions semàntiques $f^*_{\mathbb{M}}$ i $f^{**}_{\mathbb{M}}$.

II- Diferència d'intervals de marques

La diferència dels intervals $\mathfrak{X}$ i $\mathfrak{Y}$ la representem per $\mathfrak{X} - \mathfrak{Y}$ i és un interval de marques $\mathfrak{Z} \in I^*(\mathbb{M})$ calculat en una escala DI_n per

$$\mathfrak{Z} = \mathfrak{X} - \mathfrak{Y} = \left[\langle \underline{x}, g_x \rangle + \langle -\overline{y}, g_y \rangle, \langle \overline{x}, g_x \rangle + \left\langle -\underline{y}, g_y \right\rangle\right].$$

Com comentavem en la suma, pot ser necessari fer una coerció d'un dels extrems resultants a la major de les granularitats d'ambdós extrems resultants.

La diferència d'intervals de marques, igual que succeïa amb la suma, és JM-commutativa. Es tracta també d'un operador racional, i l'expressió donada pel seu càlcul podem fer-la a partir del punts i valors de sella o directament a partir de les extensions semàntiques $f^*_{\mathbb{M}}$ i $f^{**}_{\mathbb{M}}$.

III- Producte d'intervals de marques

El producte dels intervals $\mathfrak{X}$ i $\mathfrak{Y}$ el representem per $\mathfrak{X} * \mathfrak{Y}$ i és un interval de marques $\mathfrak{Z} \in I^*(\mathbb{M})$ calculat en una escala DI_n per

1. $\left[\underline{X} * \underline{Y}, \overline{X} * \overline{Y}\right]$ si $\underline{X} \geq 0,\ \overline{X} \geq 0,\ \underline{Y} \geq 0,\ \overline{Y} \geq 0.$

2. $\left[\overline{X} * \underline{Y}, \underline{X} * \overline{Y}\right]$ si $\underline{X} \geq 0,\ \overline{X} \geq 0,\ \underline{Y} \geq 0,\ \overline{Y} < 0.$

3. $\left[\overline{X} * \underline{Y}, \overline{X} * \overline{Y}\right]$ si $\underline{X} \geq 0,\ \overline{X} \geq 0,\ \underline{Y} < 0,\ \overline{Y} \geq 0.$

4. $\left[\overline{X} * \underline{Y}, \underline{X} * \overline{Y}\right]$ si $\underline{X} \geq 0,\ \overline{X} \geq 0,\ \underline{Y} < 0,\ \overline{Y} < 0.$

5. $\left[\underline{X} * \underline{Y}, \overline{X} * \underline{Y}\right]$ si $\underline{X} \geq 0,\ \overline{X} < 0,\ \underline{Y} \geq 0,\ \overline{Y} \geq 0.$

6. $\left[\max\left\{\overline{X} * \overline{Y}, \underline{X} * \underline{Y}\right\}, \min\left\{\overline{X} * \underline{Y}, \underline{X} * \overline{Y}\right\}\right]$ si $\underline{X}, \underline{Y} \geq 0, \overline{X}, \overline{Y} < 0.$

7. $\left[\left\langle 0, g^M_{x,y}\right\rangle, \left\langle 0, g^M_{x,y}\right\rangle\right]$ si $\underline{X}, \overline{Y} \geq 0, \overline{X}, \underline{Y} < 0.$

8. $\left[\overline{X} * \overline{Y}, \underline{X} * \overline{Y}\right]$ si $\underline{X} \geq 0,\ \overline{X} < 0,\ \underline{Y} < 0,\ \overline{Y} < 0.$

9. $\left[\underline{X} * \overline{Y}, \overline{X} * \overline{Y},\right]$ si $\underline{X} < 0,\ \overline{X} \geq 0,\ \underline{Y} \geq 0,\ \overline{Y} \geq 0.$

10. $\left[\left\langle 0, g^M_{x,y}\right\rangle, \left\langle 0, g^M_{x,y}\right\rangle\right]$ si $\underline{X}, \overline{Y} < 0, \overline{X}, \underline{Y} \geq 0.$

11. $\left[\min\left\{\overline{X} * \underline{Y}, \underline{X} * \overline{Y}\right\}, \max\left\{\overline{X} * \overline{Y}, \underline{X} * \underline{Y}\right\}\right]$ si $\underline{X}, \underline{Y} < 0, \overline{X}, \overline{Y} \geq 0.$

12. $\left[\overline{X} * \underline{Y}, \underline{X} * \underline{Y}\right]$ si $\underline{X} < 0,\ \overline{X} \geq 0,\ \underline{Y} < 0,\ \overline{Y} < 0.$

13. $\left[\underline{X} * \overline{Y}, \overline{X} * \underline{Y}\right]$ si $\underline{X} < 0,\ \overline{X} < 0,\ \underline{Y} \geq 0,\ \overline{Y} \geq 0.$

14. $\left[\overline{X} * \overline{Y}, \overline{X} * \underline{Y}\right]$ si $\underline{X} < 0,\ \overline{X} < 0,\ \underline{Y} \geq 0,\ \overline{Y} < 0.$

15. $\left[\underline{X} * \overline{Y}, \underline{X} * \underline{Y}\right]$ si $\underline{X} < 0,\ \overline{X} < 0,\ \underline{Y} < 0,\ \overline{Y} \geq 0.$

16. $\left[\overline{X} * \overline{Y}, \underline{X} * \underline{Y}\right]$ si $\underline{X} < 0,\ \overline{X} < 0,\ \underline{Y} < 0,\ \overline{Y} < 0.$

És inncessari, en el cas del producte, de fer una coerció de la granularitat dels extrems del resultat, degut a la regularitat del producte de marques, unit al fet que per ser $\mathfrak{X}$ i $\mathfrak{Y}$ intervals de marques els respectius extrems en cada un dels intervals tenen la mateixa granularitat.

IV- Quocient d'intervals de marques

Si $0 \notin \mathfrak{Y}'$, el quocient dels intervals de marques $\mathfrak{X}$ i $\mathfrak{Y}$ el representem per $\mathfrak{X}/\mathfrak{Y}$, i és un interval de marques $\mathfrak{Z} \in I^*(\mathbb{M})$ calculat en una escala DI_n de la forma

1. $\left[\underline{X}\,/\,\overline{Y}, \overline{X}\,/\,\underline{Y}\right]$ si $\underline{X} \geq 0,\ \overline{X} \geq 0,\ \underline{Y} > 0,\ \overline{Y} > 0.$
2. $\left[\overline{X}\,/\,\overline{Y}, \underline{X}\,/\,\underline{Y}\right]$ si $\underline{X} \geq 0,\ \overline{X} \geq 0,\ \underline{Y} < 0,\ \overline{Y} < 0.$
3. $\left[\underline{X}\,/\,\overline{Y}, \overline{X}\,/\,\overline{Y}\right]$ si $\underline{X} \geq 0,\ \overline{X} < 0,\ \underline{Y} > 0,\ \overline{Y} > 0.$
4. $\left[\overline{X}\,/\,\underline{Y}, \underline{X}\,/\,\underline{Y}\right]$ si $\underline{X} \geq 0,\ \overline{X} < 0,\ \underline{Y} < 0,\ \overline{Y} < 0.$
5. $\left[\underline{X}\,/\,\underline{Y}, \overline{X}\,/\,\underline{Y}\right]$ si $\underline{X} < 0,\ \overline{X} \geq 0,\ \underline{Y} > 0,\ \overline{Y} > 0.$
6. $\left[\overline{X}\,/\,\overline{Y}, \underline{X}\,/\,\overline{Y}\right]$ si $\underline{X} < 0,\ \overline{X} \geq 0,\ \underline{Y} < 0,\ \overline{Y} < 0.$
7. $\left[\underline{X}\,/\,\underline{Y}, \overline{X}\,/\,\overline{Y}\right]$ si $\underline{X} < 0,\ \overline{X} < 0,\ \underline{Y} > 0,\ \overline{Y} > 0.$
8. $\left[\overline{X}\,/\,\underline{Y}, \underline{X}\,/\,\overline{Y}\right]$ si $\underline{X} < 0,\ \overline{X} < 0,\ \underline{Y} < 0,\ \overline{Y} < 0.$

Igual com hem comentat pel producte d'intervals de marques, és innecessari fer una coerció dels extrems del resultat a la major de les granularitats, ja que aquestes coincidiran.

Capítol 4

El context intervalar lineal

Els intervals modals han estat estudiats exhaustivament des del punt de vista de les operacions aritmètiques amb la semàntica que aquestes, donada la modalitat dels operands i dels resultats, porten associades.

Amb les operacions lineals donem un enfoc diferent al càlcul intervalar. En aquest capítol anem a definir les operacions lineals i a analitzar les seves propietats i la seva semàntica.

Els motius que ens porten a buscar un nou context intervalar són els següents: per un costat, el conjunt dels intervals modals, amb les operacions aritmètiques, té dificultats d'interpretació quan apareixen multiincidències impròpies. Les operacions lineals solucionen aquesta dificultat amb una semàntica que, encara que aparentment pot resultar més dèbil, acabarà sent fonamental a l'hora d'interpretar sistemes d'equacions lineals. Per altra banda, el producte aritmètic amb què fins ara venim treballant, presenta un inconvenient que no compensa en algunes ocasions els avantatges de la seva interpretació semàntica; es tracta del fet de no complir-se la propietat distributiva respecte de la suma, propietat que sí es verifica en els nombres reals. Ens interessa, per tant, operar en un context en què el producte verifiqui aquesta propietat distributiva.

Per tot això, definirem les operacions lineals intervalars i aconseguirem solucionar el problema descrit. Tot i així, n'apareixerà un de nou: el de la interpretació semàntica compatible amb el nou producte. No volem dir que el producte lineal no serà interpretable, sinó que ho serà d'una forma distinta de com ho era el producte aritmètic; mentre que la interpretació semàntica del producte aritmètic depenia exclusivament i directa de les modalitats dels operands i del resultat, la semàntica lineal, quan depengui d'aquestes modalitats, ho farà de forma indirecta.

Els passos que seguirem en aquest capítol seran els següents. En primer lloc definirem les operacions lineals: suma, diferència, producte i quocient. A continuació passarem a realitzar l'estudi de les propietats que verifiquen; així veurem que el conjunt dels intervals modals amb la suma lineal té estructura de grup commutatiu i amb el producte lineal, té estructura de semigrup. La distributivitat del producte lineal respecte la suma dotarà al conjunt dels intervals modals amb la suma i productes lineals d'estructura d'anell commutatiu amb element unitat. Aquest aspecte està tractat a [9].

Després d'aquesta anàlisi de les operacions lineals i de les seves propietats, aquest capítol aporta l'estudi de la interpretació semàntica que comporten i seguidament introdueix el concepte de funció lineal intervalar com a extensió intervalar d'una funció racional real; i analitzarem la semàntica que aquesta extensió comporta. Un cop descrites aquestes funcions i la seva semàntica, s'aporta també un estudi del concepte de sistema d'equacions lineals intervalars amb operacions lineals, analitzant la seva resolució i interpretació semàntica.

Tot el context lineal serà finalment tractat des del punt de vista dels intervals de marques, que seran els que ens permetran realitzar les operacions lineals amb la versió de la truncació pròpia de les marques.

4.1 Les operacions lineals

Definim en aquesta secció les diferents operacions que dotaran al conjunt $I^*(\mathbb{R})$ d'estructura lineal. En la descripció del producte lineal, hem preferit donar el procés que ha donat lloc a la seva construcció per tal de veure els diferents avantatges aconseguits a cada pas.

4.1.1 Suma lineal intervalar

Definició 4.1 ***(Suma lineal intervalar)***

Construïm la ***suma lineal intervalar*** *com l'operació interna en* $I^*(\mathbb{R})$ *que representem amb el símbol* $+$

$$\begin{array}{ccc} I^*(\mathbb{R}) \times I^*(\mathbb{R}) & \xrightarrow{+} & I^*(\mathbb{R}) \\ (A,B) & \longmapsto & A+B \end{array}$$

de forma que si $A, B \in I^*(\mathbb{R})$, *designant* A *per* $[\underline{a}, \overline{a}]$ *i* B *per* $\left[\underline{b}, \overline{b}\right]$, *aleshores*

$$A + B = [\underline{a}, \overline{a}] + \left[\underline{b}, \overline{b}\right] := \left[\underline{a} + \underline{b}\,,\, \overline{a} + \overline{b}\right].$$

La suma lineal de dos intervals coincideix operativament amb la suma aritmètica.

4.1.2 Producte semilineal

El procés de construcció del producte lineal intervalar passa per la introducció del producte semilineal, que no verificarà la propietat distributiva, i la seva posterior extensió al producte lineal.

Definició 4.2 ***(Producte semilineal d'un escalar per un interval)***
Donats $A \in I^*(\mathbb{R})$ i $\lambda \in \mathbb{R}$, definim el ***producte semilineal de l'interval*** *A* ***per l'escalar*** *λ i el representem per $A^s\lambda$, de la forma*

$$A^s\lambda := \begin{cases} A * \lambda & \textit{si } \lambda \geq 0 \\ \\ dual\,(A) * \lambda & \textit{si } \lambda < 0. \end{cases}$$

El producte semilineal podem expressar-lo utilitzant les coordenades ínfim i suprem de l'interval A. D'aquesta forma, si designem A per $[\underline{a}, \overline{a}]$, resultarà

$$A^s\lambda = \begin{cases} A * \lambda = [\underline{a}, \overline{a}] * \lambda = [\underline{a} \cdot \lambda, \overline{a} \cdot \lambda] & \textit{si } \lambda \geq 0 \\ \\ dual\,(A) * \lambda = [\overline{a}, \underline{a}] * \lambda = [\underline{a} \cdot \lambda, \overline{a} \cdot \lambda] & \textit{si } \lambda < 0. \end{cases}$$

Definició 4.3 ***(Producte semilineal de dos intervals)***
Donats $A, B \in I^*(\mathbb{R})$ tals que $0 \notin interior\,(B')$, definim el ***producte semilineal dels intervals*** *A i B i el representem per A^sB com*

$$A^sB := \begin{cases} \bigvee\limits_{b,B'} (A^sb) & \textit{si } B \textit{ propi} \\ \\ \bigwedge\limits_{b,B'} (A^sb) & \textit{si } B \textit{ impropi.} \end{cases}$$

Observació. És fàcil veure a partir de les definicions donades que el producte semilineal dels intervals A i B pot expressar-se de la forma

$$A^sB = \begin{cases} A * B & \text{si } B \geq 0 \\ \\ dual\,(A) * B & \text{si } B \leq 0 \\ \\ \text{no definit} & \text{si } 0 \in interior\,(B'), \end{cases}$$

ja que

$\triangleright$) $B \geq 0$

$$\begin{cases} B \text{ propi: } A^s B = \bigvee\limits_{b,B'} (A^s b) = \bigvee\limits_{b,B'} (A * b) = A * B \\ \\ B \text{ impropi: } A^s B = \bigwedge\limits_{b,B'} (A^s b) = \bigwedge\limits_{b,B'} (A * b) = A * B. \end{cases}$$

$\triangleright$) $B < 0$

$$\begin{cases} B \text{ propi: } A^s B = \bigvee\limits_{b,B'} (A^s b) = \bigvee\limits_{b,B'} (dual\,(A) * b) = dual\,(A) * B \\ \\ B \text{ impropi: } A^s B = \bigwedge\limits_{b,B'} (A^s b) = \bigwedge\limits_{b,B'} (dual\,(A) * b) = dual\,(A) * B. \end{cases}$$

Propietats del producte semilineal

1. **Associativa:** Donats $A, B, C \in I^*(\mathbb{R})$ tals que $0 \notin interior\,(B')\,, 0 \notin interior\,(C')$, es compleix

$$A^s\,(B^s C) = (A^s B)^s C$$

ja que

- $B \geq 0, C \geq 0 \Rightarrow \begin{cases} A^s\,(B^s C) = A^s\,\underbrace{(B * C)}_{\geq 0} = A * (B * C) \\ \\ (A^s B)^s C = (A^s B) * C = (A * B) * C. \end{cases}$

- $B \geq 0, C < 0 \Rightarrow$
$$\begin{cases} A^s\,(B^s C) = & A^s\,\underbrace{(dual(B) * C)}_{\leq 0} = dual(A) * (dual(B) * C) \\ \\ (A^s B)^s C = & dual(A^s B) * C = (dual(A * B)) * C = \\ = & (dual(A) * dual(B)) * C \end{cases}$$

- $B < 0, C \geq 0 \Rightarrow \begin{cases} A^s\,(B^s C) = A^s\,\underbrace{(B * C)}_{\leq 0} = dual(A) * (B * C) \\ \\ (A^s B)^s C = (A^s B) * C = (dual(A) * B) * C. \end{cases}$

- $B < 0, C < 0 \Rightarrow$

$$\begin{cases} A^s\,(B^sC) = & A^s\,\underbrace{(dual(B) * C)}_{\geq 0} = A * (dual(B) * C) \\ \\ (A^sB)^sC = & dual(A^sB) * C = dual\,(dual(A) * B) * C = \\ \\ = & (A * dual(B)) * C. \end{cases}$$

2. **Distributiva per l'esquerra**: Donats $A, B, C \in I^*(\mathbb{R})$ tals que $0 \notin$ *interior* (C'), es verifica

$$(A+B)^sC = A^sC + B^sC$$

ja que

- Si C és propi

$$\begin{aligned} (A+B)^sC = & \bigvee_{c,C'} (A+B)^s c = \bigvee_{c,C'} (A+B) * c = \\ = & \bigvee_{c,C'} A * c + \bigvee_{c,C'} B * c \qquad \text{si } C \geq 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (A+B)^sC = & \bigvee_{c,C'} (A+B)^s c = \bigvee_{c,C'} dual(A+B) * c = \\ = & \bigvee_{c,C'} dual(A) * c + \bigvee_{c,C'} dual(B) * c \quad \text{si } C < 0. \end{aligned}$$

- Si C és impropi

$$\begin{aligned} (A+B)^sC = & \bigwedge_{b,C'} (A+B)^s c = \bigwedge_{b,C'} (A+B) * c = \\ = & \bigwedge_{b,C'} A * c + \bigwedge_{b,C'} B * c \qquad \text{si } C \geq 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (A+B)^sC = & \bigwedge_{c,C'} (A+B)^s c = \bigwedge_{c,C'} dual(A+B) * c = \\ = & \bigwedge_{c,C'} dual(A) * c + \bigwedge_{c,C'} dual(B) * c \quad \text{si } C < 0. \end{aligned}$$

3. **Producte per la unitat**: Donat $A \in I^*(\mathbb{R})$, $A^s [1,1] = A$.

4. **Existència d'element invers**: Donat $A \in I^*(\mathbb{R})$ tal que $0 \notin A'$, existeix l'element invers d'A respecte el producte semilineal, i és

$$A^{-1^\circ} = \begin{cases} \frac{1}{dual(A)} \text{ si } A > 0 \\ \\ \frac{1}{A} \text{ si } A < 0. \end{cases}$$

De forma evident ja que

- Si $A > 0$, $A^s \dfrac{1}{dual(A)} = A * \dfrac{1}{dual(A)}$.
- Si $A < 0$, $A^s \dfrac{1}{A} = dual(A) * \dfrac{1}{A}$.

Observacions.

1. El producte semilineal de dos intervals no és commutatiu, com es posa de manifest en aquest contraexemple

$$\begin{aligned} [1,3]^s [-3,-1] &= [-3,-3] \\ [-3,-1]^s [1,3] &= [-9,-1] \end{aligned}$$

.

2. El producte semilineal pot expressar-se també a partir de les coordenades ínfim i suprem de cada un dels operands. D'aquesta forma si designem A per $[\underline{a}, \overline{a}]$ i B per $\left[\underline{b}, \overline{b}\right]$, amb $0 \notin interior(B')$ resultarà

$$A^s B = [\underline{a}, \overline{a}]^s \left[\underline{b}, \overline{b}\right] = \begin{cases} \left[\underline{a}\underline{b}, \overline{a}\overline{b}\right] \text{ si } A \geq 0 \text{ i } B \geq 0 \\ \\ \left[\underline{a}\underline{b}, \overline{a}\overline{b}\right] \text{ si } A \geq 0 \text{ i } B < 0 \\ \\ \left[\underline{a}\overline{b}, \overline{a}\underline{b}\right] \text{ si } A < 0 \text{ i } B \geq 0 \\ \\ \left[\underline{a}\overline{b}, \overline{a}\underline{b}\right] \text{ si } A < 0 \text{ i } B < 0 \\ \\ \left[\underline{a}\overline{b}, \overline{a}\overline{b}\right] \text{ Si } 0 \in interior(A') \text{ i } \overline{a} < 0, \underline{a} > 0 \\ \\ [\underline{a}\underline{b}, \overline{a}\underline{b}] \text{ Si } 0 \in interior(A') \text{ i } \overline{a} > 0, \underline{a} < 0. \end{cases}$$

3. El producte semilineal no resol el problema de la distributivitat que ens plantejava el producte aritmètic, donat que no és distributiu per la dreta, com pot veure's en el contraexemple següent

$$\begin{aligned}[-1,-3]^s\,[2,7]+[-1,-3]^s\,[-6,-4] &= [-7,-6]+[4,18]=[-3,12]\\ [-1,3]^s\,([2,7]+[-6,-4]) &= \text{no definit.}\end{aligned}$$

Aquest problema queda definitivament resolt a partir del producte lineal que seguidament passem a definir.

4.1.3 Producte lineal

Definició 4.4 ***(Producte lineal)***
Donats $A, B \in I^*(\mathbb{R})$, tals que $0 \notin interior\,(A')$ i $0 \notin interior\,(B')$, el ***producte lineal*** *dels intervals A i B el representem per $A \circ B$ i el definim a partir del producte semilineal com*

$$A \circ B := \begin{cases} A^s B \;\; si\ A \geq 0 \\ \\ A^s dual\,(B) \;\; si\ A < 0. \end{cases}$$

Observacions.

1. És possible relacionar el producte lineal que hem definit amb el producte aritmètic. Aquesta relació ens vindrà donada de la forma següent

$$A \circ B = \begin{cases} A * B & \text{si } A \geq 0, B \geq 0 \\ \\ dual\,(A) * B & \text{si } A \geq 0, B < 0 \\ \\ A * dual\,(B) & \text{si } A < 0, B \geq 0 \\ \\ dual\,(A) * dual\,(B) & \text{si } A < 0, B < 0. \end{cases}$$

La demostració és el resultat d'aplicar la definició de producte lineal

$$A \circ B = \begin{cases} A^s B \;=\left\{ \begin{array}{l} A * B \text{ si } B \geq 0 \\ \\ dual\,(A) * B \text{ si } B < 0 \end{array} \right\} \text{si } A \geq 0 \\ \\ A^s dual\,(B) \;=\left\{ \begin{array}{l} A * dual\,(B) \;\text{ si } B \geq 0 \\ \\ dual\,(A) * dual\,(B) \;\text{ si } B < 0 \end{array} \right\} \text{si } A < 0. \end{cases}$$

2. Pot resultar interessant expressar el producte lineal de dos intervals a partir de les seves coordenades, donat que el resultat que s'obté ofereix una gran simplicitat en el seu càlcul. D'aquesta forma si $A = [\underline{a}, \overline{a}]$ i $B = \left[\underline{b}, \overline{b}\right]$, amb $0 \notin interior\,(A')$ i $0 \notin interior\,(B')$, es compleix

$$A \circ B = [\underline{a}, \overline{a}] \circ \left[\underline{b}, \overline{b}\right] = \left[\underline{a}\,\underline{b}, \overline{a}\overline{b}\right]$$

ja que

- Si $A \geq 0$ i $B \geq 0 \Rightarrow A \circ B = [\underline{a}, \overline{a}] * \left[\underline{b}, \overline{b}\right] = \left[\underline{a}\,\underline{b}, \overline{a}\overline{b}\right]$.
- Si $A \geq 0$ i $B < 0 \Rightarrow A \circ B = [\overline{a}, \underline{a}] * \left[\underline{b}, \overline{b}\right] = \left[\underline{a}\,\underline{b}, \overline{a}\overline{b}\right]$.
- Si $A < 0$ i $B \geq 0 \Rightarrow A \circ B = [\underline{a}, \overline{a}] * \left[\overline{b}, \underline{b}\right] = \left[\underline{a}\,\underline{b}, \overline{a}\overline{b}\right]$.
- Si $A < 0$ i $B < 0 \Rightarrow A \circ B = [\overline{a}, \underline{a}] * \left[\overline{b}, \underline{b}\right] = \left[\underline{a}\,\underline{b}, \overline{a}\overline{b}\right]$.

3. És important tenir en compte que la relació entre el producte lineal i el producte aritmètic és doble; és a dir, no només podem expressar el producte lineal a partir de l'aritmètic, sinó aquest últim pot ser expressat a partir del primer, sempre que els intervals no continguin el 0 en el seu interior. Així obtindríem

$$A * B = \begin{cases} A \circ B \text{ si } A \geq 0 \text{ i } B \geq 0 \\ \\ dual\,(A) \circ B \text{ si } A \geq 0 \text{ i } B < 0 \\ \\ A \circ dual\,(B) \text{ si } A < 0 \text{ i } B \geq 0 \\ \\ dual\,(A) \circ dual\,(B) \text{ si } A < 0 \text{ i } B < 0. \end{cases}$$

Definició 4.5 ***(Producte lineal estès)***
L'extensió del producte lineal al conjunt dels intervals modals $I^*(\mathbb{R})$ constitueix el que anomenem ***producte lineal estès,*** *que representem amb el mateix símbol que utilitzem pel producte lineal*

$$\begin{array}{ccc} I^*(\mathbb{R}) \times I^*(\mathbb{R}) & \xrightarrow{\circ} & I^*(\mathbb{R}) \\ (A, B) & \longmapsto & A \circ B \end{array}$$

de forma que si designem A per $[\underline{a}, \overline{a}]$ i B per $\left[\underline{b}, \overline{b}\right]$, aleshores el definim com

$$A \circ B = [\underline{a}, \overline{a}] \circ \left[\underline{b}, \overline{b}\right] := \left[\underline{a}\underline{b}, \overline{a}\overline{b}\right].$$

Observació. El producte lineal estès coincideix amb el producte lineal quan cap dels operands conté 0 en el seu interior. Com veurem més endavant, la semàntica que dóna lloc el producte lineal quan els intervals operands contenen el 0 en el seu interior és una semàntica poc útil per a molts dels propòsits que pretenem. Per aquest motiu, quan volguem referir-nos al producte lineal estès ho farem de forma explícita. En cas contrari, entendrem que ens referim al producte lineal no estès.

4.1.4 La diferència lineal

Definició 4.6 ***(Diferència lineal)***

La ***diferència lineal*** *és una operació interna en* $I^*(\mathbb{R})$ *que representem per* $\overset{\circ}{-}$

$$\begin{array}{ccc} I^*(\mathbb{R}) \times I^*(\mathbb{R}) & \overset{\overset{\circ}{-}}{\longrightarrow} & I^*(\mathbb{R}) \\ (A, B) & \longmapsto & A \overset{\circ}{-} B \end{array}$$

en què si designem A *per* $[\underline{a}, \overline{a}]$ *i* B *per* $\left[\underline{b}, \overline{b}\right]$, *es defineix per*

$$A \overset{\circ}{-} B = [\underline{a}, \overline{a}] \overset{\circ}{-} \left[\underline{b}, \overline{b}\right] := \left[\underline{a} - \underline{b}, \overline{a} - \overline{b}\right]$$

Observació. La relació existent entre la diferència aritmètica i la diferència lineal que acabem de definir és

$$A \overset{\circ}{-} B = A - dual\,(B)$$

mentre que la relació existent entre la diferència lineal i la suma ens vindrà donada per

$$A \overset{\circ}{-} B = [\underline{a}, \overline{a}] + \left[-\underline{b}, -\overline{b}\right].$$

Molts cops, en treballant en el context intervalar lineal, no utilitzarem el símbol $\overset{\circ}{-}$ per designar la diferència lineal, sinó que simplement escriurem el signe de la diferència $-$. Ens cal destacar que la diferència aritmètica intervalar i la diferència lineal són operacions diferents i que la no distinció entre ambdues pot donar lloc a errors.

4.1.5 El quocient lineal

Definició 4.7 ***(Quocient lineal)***

Donats $A, B \in I^*(\mathbb{R})$, *designant* A *per* $[\underline{a}, \overline{a}]$ *i* B *per* $\left[\underline{b}, \overline{b}\right]$ *verificant* $0 \notin interior\,(A')$ *i* $0 \notin B'$, *representem el* ***quocient lineal*** *dels intervals* A *i* B *per* $A/^{\circ}B$, *i el definim com*

$$A/^{\circ}B := \left[\frac{\underline{a}}{\underline{b}}, \frac{\overline{a}}{\overline{b}}\right] = [\underline{a}, \overline{a}] \circ \left[\frac{1}{\underline{b}}, \frac{1}{\overline{b}}\right].$$

Observació. De la mateixa forma que hem construït l'extensió del producte lineal, podem considerar l'extensió del quocient lineal sobre intervals A i B sempre que $0 \notin B'$, a partir del càlcul amb extrems que ens ha definit el quocient lineal.

4.2 Estructures algèbriques

A continuació efectuem l'estudi de les propietats que verifica el conjunt dels intervals modals amb les operacions lineals que acabem de definir.

4.2.1 Propietats de la suma: El grup $(I^*(\mathbb{R}), +)$

La suma lineal intervalar, com ja hem esmentat, coincideix operativament amb la suma aritmètica i per tant, les propietats que compleix són les mateixes que les que verificava aquesta (vegeu [37, pàg 74]). Per aquest motiu no en fem la demostració i ens limitem a recordar-les. Aquestes propietats són:

1. **Commutativa**: Donats $A, B \in I^*(\mathbb{R})$, es compleix que
$$A + B = B + A.$$
2. **Associativa**: Donats $A, B, C \in I^*(\mathbb{R})$, es compleix que
$$(A + B) + C = A + (B + C).$$
3. **Existència d'element neutre**: Per tot $A \in I^*(\mathbb{R})$, es verifica
$$A + [0, 0] = A = [0, 0] + A.$$
4. **Existència d'element oposat**: Per tot $A \in I^*(\mathbb{R})$, $A = [\underline{a}, \overline{a}]$ si considerem l'interval $\overset{\circ}{-} A = [-\underline{a}, -\overline{a}]$, es compleix que
$$A + \left(\overset{\circ}{-} A\right) = [0, 0] = \left(\overset{\circ}{-} A\right) + A.$$
L'interval $\overset{\circ}{-} A = [-\underline{a}, -\overline{a}]$ és l'element oposat de l'interval $A = [\underline{a}, \overline{a}]$.

El conjunt $I^*(\mathbb{R})$ amb l'operació suma lineal $(I^*(\mathbb{R}), +)$ té estructura de **grup commutatiu**.

4.2.2 Propietats del producte lineal: El semigrup $(I^*(\mathbb{R}), \circ)$

El producte lineal i el producte aritmètic d'intervals modals no coincideixen. Les propietats del producte lineal són:

1. **Commutativa:** Si $A, B \in I^*(\mathbb{R})$ es compleix que
$$A \circ B = B \circ A.$$
2. **Associativa:** Si $A, B, C \in I^*(\mathbb{R})$ es compleix que
$$A \circ (B \circ C) = (A \circ B) \circ C.$$
3. **Existència d'element neutre:** $[1,1] \in I^*(\mathbb{R})$ i si $A \in I^*(\mathbb{R})$ aleshores
$$[1,1] \circ A = A = A \circ [1,1].$$
4. **Existència d'element invers:** Si $A \in I^*(\mathbb{R})$ tal que $0 \notin A'$ aleshores existeix element invers respecte el producte lineal que representem per $A^{-1\circ}$ essent
$$A^{-1\circ} = 1/^{\circ} A = \left[\frac{1}{\underline{a}}, \frac{1}{\overline{a}}\right].$$
verificant-se $A^{-1\circ} \circ A = [1,1]$.
5. **Distributiva respecte la suma:** Si $A, B, C \in I^*(\mathbb{R})$ es compleix
$$A \circ (B + C) = A \circ B + A \circ C.$$

4.2.3 L'anell dels intervals modals amb les operacions lineals: $(I^*(\mathbb{R}), +, \circ)$

El conjunt $I^*(\mathbb{R})$ amb les operacions suma i producte lineal compleix les propietats necessàries per a ser un anell. Destaquem que la propietat distributiva era precisament la propietat que volíem aconseguir, ja que no la verifica el producte aritmètic.

El fet que el producte lineal sigui commutatiu i que existeixi element neutre respecte aquest producte dota al conjunt $(I^*(\mathbb{R}), +, \circ)$ d'estructura d'**anell commutatiu amb element unitat**[1].

[1] No es tracta d'un cos, ja que no tot interval diferent de $[0,0]$ té element invers.

4.2.4 Altres propietats de les operacions lineals

Independentment de les propietats que hem vist que complien les operacions lineals, podem destacar-ne també les següents:

1. Donat $A \in I^* (\mathbb{R})$,
$$[0,0] \circ A = [0,0] = A \circ [0,0] \, .$$
2. Donat $A \in I^* (\mathbb{R})$,
$$[-1,-1] \circ A = op\,(A) = \overset{\circ}{-} A \neq -A.$$
3. Si $A \in I^* (\mathbb{R})$ i $\lambda \in \mathbb{R}$
$$\lambda \circ A = \begin{cases} \lambda * A \text{ si } \lambda \geq 0 \\ \\ dual\,(\lambda * A) \text{ si } \lambda < 0. \end{cases}$$
4. Si $A, B \in I^* (\mathbb{R})$, $A = [\underline{a}, \overline{a}]$ i $B = \left[\underline{b}, \overline{b}\right]$, aleshores
$$A \overset{\circ}{-} B = [\underline{a}, \overline{a}] \overset{\circ}{-} \left[\underline{b}, \overline{b}\right] = [\underline{a}, \overline{a}] + \left[-\underline{b}, -\overline{b}\right].$$
5. Donats $A, B \in I^* (\mathbb{R})$ es compleix
   - $dual\,(A + B) = dual\,(A) + dual\,(B)$.
   - $dual\left(A \overset{\circ}{-} B\right) = dual\,(A) \overset{\circ}{-} dual\,(B)$.
   - $dual\,(A \circ B) = dual\,(A) \circ dual\,(B)$.
   - Si $0 \notin B'$, $dual\,(A/^\circ B) = dual\,(A)\,/^\circ dual\,(B)$.
6. Si $W \in \left\{+, \overset{\circ}{-}, /^\circ, \circ\right\}$ és una operació lineal intervalar, i $w \in \{+, -, /, *\}$ és la seva corresponent operació real, aleshores donats $A, B \in I^* (\mathbb{R})$ es verifica
$$\inf\,(A\,W\,B) = \inf\,(A) \; w \; \inf\,(B)$$
$$\sup\,(A\,W\,B) = \sup\,(A) \; w \; \sup\,(B)\,,$$
és a dir
$$A\,W\,B = [\inf\,(A) \; w \; \inf\,(B)\,, \sup\,(A) \; w \; \sup\,(B)] \, .$$

Observació. El producte lineal no és inclusiu; és a dir

$$\left.\begin{array}{l} A_1 \subseteq B_1 \\ A_2 \subseteq B_2 \end{array}\right\} \not\Longrightarrow A_1 \circ A_2 \subseteq B_1 \circ B_2,$$

com pot veure's en el contraexemple:

$$\left.\begin{array}{l} A_1 = [3,5]\,,\ B_1 = [2,5] \\ A_2 = [-3,-6]\,,\ B_2 = [-4,-5] \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} A_1 \circ A_2 = [-9,-30] \\ B_1 \circ B_2 = [-8,-25]\,. \end{array}\right\}$$

4.3 Semàntica lineal

El càlcul intervalar no tindria sentit sinó poguéssim donar interpretació semàntica dels resultats obtinguts. Fins ara, quan un càlcul era realitzat amb les operacions aritmètiques, les modalitats dels operands i del resultat eren les que determinaven la interpretació semàntica modal. Quan efectuem operacions lineals, pot perdre's en bona part el paper jugat per la modalitat dels operands i del resultat, donant lloc a una semàntica aparentment més pobra que l'obtinguda amb les operacions aritmètiques.

En aquesta secció analitzarem les diferents semàntiques que podem aplicar quan els càlculs es fan utilitzant les operacions lineals. Per aconseguir-ho, començarem estudiant la semàntica lineal de cada una de les operacions vistes i a continuació estendrem aquesta semàntica de les operacions lineals en el cas en què apareguin més d'una d'elles en un mateix càlcul.

Un cas particular però molt interessant és aquell en què les operacions lineals poden ser expressades a partir d'operacions aritmètiques. Això sempre és possible de fer amb la suma, però per poder fer-ho amb el producte o el quocient, cap dels operands podrà contenir el 0 en el seu interior. En altres paraules, no podrem considerar ni el producte lineal estès ni tampoc el quocient lineal estès.

4.3.1 Semàntica de les operacions lineals

Proposició 4.8 ***(Semàntica de la suma lineal)***
Donats $A, B \in I^*(\mathbb{R})$ designats per $[\underline{a}, \overline{a}]$ i $\left[\underline{b}, \overline{b}\right]$ respectivament, la suma lineal

$$A + B = [\underline{a}, \overline{a}] + \left[\underline{b}, \overline{b}\right] = \left[\underline{a} + \underline{b}\,,\ \overline{a} + \overline{b}\right]$$

compleix, per tot $\xi \in [0,1]$ que

$$\left((1-\xi)\,\underline{a} + \xi\overline{a}\right) + \left((1-\xi)\,\underline{b} + \xi\overline{b}\right) = \left((1-\xi)\left(\underline{a} + \underline{b}\right) + \xi\left(\overline{a} + \overline{b}\right)\right). \quad (4.1)$$

Corol·lari 4.9 *A partir de la semàntica de la suma lineal, es dedueixen les següents interpretacions aplicades directament sobre els elements dels intervals A, B i $A+B$*

- $U\,(a, A')\, E\,(b, B')\, E\left(c, (A+B)'\right) a+b=c.$
- $U\,(b, B')\, E\,(a, A')\, E\left(c, (A+B)'\right) a+b=c.$
- $U\left(c, (A+B)'\right) E\,(a, A')\, E\,(b, B')\, a+b=c.$

Demostració. Assignant en cada cas el valor del paràmetre ξ el que correspondria a l'element de l'interval que té assignat el quantificador universal.

Observació. En coincidir la suma lineal amb la suma aritmètica, la semàntica d'aquesta última és aplicable també a la suma lineal.

Corol·lari 4.10 ***(Semàntica de la diferència lineal)***
Donats $A, B \in I^*(\mathbb{R})$ designats per $[\underline{a}, \overline{a}]$ i $\left[\underline{b}, \overline{b}\right]$ respectivament, la diferència lineal

$$A \overset{\circ}{-} B = [\underline{a}, \overline{a}] \overset{\circ}{-} \left[\underline{b}, \overline{b}\right] = \left[\underline{a}-\underline{b}\,,\, \overline{a}-\overline{b}\right]$$

complirà per tot $\xi \in [0,1]$

$$2\left((1-\xi)\,\underline{a}+\xi\overline{a}\right)-\left((1-\xi)\,\underline{b}+\xi\overline{b}\right)=\left((1-\xi)\,(\underline{a}-\underline{b})+\xi\left(\overline{a}-\overline{b}\right)\right).$$

Demostració. A partir de la relació entre la diferència lineal i la suma utilitzant la propietat 4 estudiada a la pàg. 154.

$$[\underline{a}, \overline{a}] \overset{\circ}{-} \left[\underline{b}, \overline{b}\right] = [\underline{a}, \overline{a}] + \left[-\underline{b}, -\overline{b}\right].$$

Corol·lari 4.11 *A partir de la semàntica de la diferència lineal, es dedueixen les següents interpretacions aplicades directament sobre els intervals A, B i $A \overset{\circ}{-} B$*

- $U\,(a, A')\, E\,(b, B')\, E\left(c, \left(A \overset{\circ}{-} B\right)'\right) a-b=c.$
- $U\,(b, B')\, E\,(a, A')\, E\left(c, \left(A \overset{\circ}{-} B\right)'\right) a-b=c.$

- $U\left(c,\left(A \overset{\circ}{-} B\right)'\right) E\left(a,[\underline{a},\overline{a}]'\right) E\left(b,\left[\underline{b},\overline{b}\right]'\right) a-b=c.$

Proposició 4.12 ***(Semàntica del producte lineal)***

Donats $A, B \in I^*(\mathbb{R})$ *designats per* $[\underline{a},\overline{a}]$ *i* $\left[\underline{b},\overline{b}\right]$ *respectivament, i de forma que* $0 \notin interior(A')$ *i* $0 \notin interior(B')$, *el producte lineal*

$$[\underline{a},\overline{a}] \circ \left[\underline{b},\overline{b}\right] = \left[\underline{ab}\,,\,\overline{ab}\right]$$

verifica la semàntica

$$U(\xi,[0,1])\,E(\beta,[0,1])$$

$$((1-\xi)\,\underline{a}+\xi\overline{a})\cdot\left((1-\beta)\,\underline{b}+\beta\overline{b}\right)=(1-\xi)\,\underline{ab}+\xi\overline{ab}.$$

Demostració. Podem expressar la igualtat

$$((1-\xi)\,\underline{a}+\xi\overline{a})\cdot\left((1-\beta)\,\underline{b}+\beta\overline{b}\right)=(1-\xi)\,\underline{ab}+\xi\overline{ab}$$

de la forma

$$((1-\xi)\,\underline{a}+\xi\overline{a})\cdot\left(\beta\left(\overline{b}-\underline{b}\right)+\underline{b}\right)=(1-\xi)\,\underline{ab}+\xi\overline{ab}. \tag{4.2}$$

Considerem a continuació els següents casos:

1. Si $(1-\xi)\,\underline{a}+\xi\overline{a}=0$[2], podrà ser degut a alguna de les situacions següents

   (a) $\underline{a}=0$ i $\xi=0$

   (b) $\overline{a}=0$ i $\xi=1$

   (c) $\underline{a}=0$ i $\overline{a}=0$ i ξ qualsevol valor entre 0 i 1.

   Cada una d'aquestes situacions es resol substituint en l'expressió vista a 4.2 el terme $(1-\xi)\,\underline{a}+\xi\overline{a}$ per 0, obtenint-se

   $$0\cdot\left(\beta\left(\overline{b}-\underline{b}\right)+\underline{b}\right)=0$$

   d'on es dedueix que β pot prendre qualsevol valor.

[2] L'interval A no conté 0 en el seu interior, però pot ser un dels seus extrems.

2. Si $(1-\xi)\,\underline{a}+\xi\overline{a}\neq 0$, de la igualtat donada a 4.2 podem escriure

$$\beta\left(\overline{b}-\underline{b}\right)+\underline{b}=\frac{(1-\xi)\,\underline{ab}+\xi\overline{ab}}{(1-\xi)\,\underline{a}+\xi\overline{a}}$$

és a dir,

$$\beta\left(\overline{b}-\underline{b}\right)=\frac{(1-\xi)\,\underline{ab}+\xi\overline{ab}}{(1-\xi)\,\underline{a}+\xi\overline{a}}-\underline{b}$$

i per tant,

$$\beta\left(\overline{b}-\underline{b}\right)=\frac{(1-\xi)\,\underline{ab}+\xi\overline{ab}-(1-\xi)\,\underline{ab}-\xi\overline{a}\underline{b}}{(1-\xi)\,\underline{a}+\xi\overline{a}},$$

arribant, d'aquesta forma, a

$$\beta\left(\overline{b}-\underline{b}\right)=\frac{\xi\overline{a}\left(\overline{b}-\underline{b}\right)}{(1-\xi)\,\underline{a}+\xi\overline{a}}$$

A partir d'aquesta última igualtat ens caldrà fer les següents distincions:

(a) Si $\overline{b}-\underline{b}=0$ (és a dir $\overline{b}=\underline{b}$) tenim

$$\beta\cdot 0=\frac{\xi\overline{a}\cdot 0}{(1-\xi)\,\underline{a}+\xi\overline{a}}$$

i per tant, β pot prendre qualsevol valor.

(b) Si $\overline{b}-\underline{b}\neq 0$ (és a dir $\overline{b}\neq\underline{b}$) tindrem

$$\beta=\frac{\xi\overline{a}}{(1-\xi)\,\underline{a}+\xi\overline{a}},$$

en aquest cas ens adonem que

$\xi=0\Rightarrow\beta=0$
$\xi=1\Rightarrow\beta=\frac{\overline{a}}{0\cdot\underline{a}+\overline{a}}=1.$

D'on resulta que β pot ser considerada como funció depenent d'ξ. És fàcil veure que es tracta d'una funció creixent, ja que

$$\beta'(\xi)=\frac{\overline{a}\left((1-\xi)\,\underline{a}+\xi\overline{a}\right)-\xi\overline{a}\left(-\underline{a}+\overline{a}\right)}{\left((1-\xi)\,\underline{a}+\xi\overline{a}\right)^2}$$

és a dir,

$$\beta'(\xi) = \frac{(1-\xi)\,\underline{a}\overline{a} + \xi\underline{a}\overline{a}}{\left((1-\xi)\,\underline{a} + \xi\overline{a}\right)^2}$$

i per tant, ja que *signe* $(\underline{a}) =$ *signe* $(\overline{a})$ obtenim

$$\beta'(\xi) = \frac{\underline{a}\overline{a}}{\left((1-\xi)\,\underline{a} + \xi\overline{a}\right)^2} \geq 0.$$

Corol·lari 4.13 ***(Semàntica de l'element invers)***
Donat $B \in I^*(\mathbb{R})$, *si* $0 \notin B'$, *es compleix*

$$U(\xi, [0,1])\, E(\beta, [0,1])$$

$$\left((1-\xi)\,\underline{b} + \xi\overline{b}\right) \cdot \left((1-\beta)\,\tfrac{1}{\underline{b}} + \beta\tfrac{1}{\overline{b}}\right) = 1.$$

$$U(\xi, [0,1])\, E(\beta, [0,1])$$

$$\left((1-\beta)\,\underline{b} + \beta\overline{b}\right) \cdot \left((1-\xi)\,\tfrac{1}{\underline{b}} + \xi\tfrac{1}{\overline{b}}\right) = 1.$$

Demostració. A partir de la semàntica del producte lineal aplicada a

$$B \circ B^{-1^\circ} = [1,1]\,.$$

Observacions.

1. De la semàntica parametritzada se'n dedueixen les semàntiques

$$U\left(\widetilde{b}, \left(B^{-1^\circ}\right)'\right) E(b, B')\, \widetilde{b} \circ b = 1$$

$$U(b, B')\, E\left(\widetilde{b}, \left(B^{-1^\circ}\right)'\right) \widetilde{b} \circ b = 1.$$

2. Podria pensar-se, erròniament, que en la definició d'element invers la condició $0 \notin B'$ es supèrflua i que n'hi hauria prou exigint que cap dels extrems de l'interval B fos nul. És fàcil veure que si únicament tinguéssim la hipòtesi $B = \left[\underline{b}, \overline{b}\right]$ amb $\underline{b} \neq 0$ i $\overline{b} \neq 0$, la semàntica de l'element invers no es compliria donat que, per exemple, si considerem

$$[-2, 1]^{-1^\circ} = \left[\frac{-1}{2}, 1\right],$$

la semàntica

$$U(\xi,[0,1])\,E(\beta,[0,1])$$

$$\left((1-\xi)\left(\tfrac{-1}{2}\right)+\xi\right)\cdot((1-\beta)(-2)+\beta)=1$$

és falsa, ja que prenent $\xi=\frac{1}{3}$, cap valor β ens donarà la igualtat; és a dir, n'hi hauria prou agafant $\tilde{b}=0\in\left[\frac{-1}{2},1\right]$ per adonar-nos que $U\left(b,[-2,1]'\right)b\cdot\tilde{b}\neq 1$.

Proposició 4.14 ***(Semàntica del quocient lineal.)***
Donats els intervals $A,B\in I^*(\mathbb{R})$, si $0\notin$ interior (A') i $0\notin B'$, el quocient lineal

$$[\underline{a},\overline{a}]\,/^{\circ}\left[\underline{b},\overline{b}\right]=[\underline{a},\overline{a}]\circ\left[\frac{1}{\underline{b}},\frac{1}{\overline{b}}\right]=\left[\frac{\underline{a}}{\underline{b}},\frac{\overline{a}}{\overline{b}}\right]$$

verifica les semàntiques

$$\begin{array}{l}U(\xi,[0,1])\,E(\beta,[0,1])\\ \qquad((1-\xi)\,\underline{a}+\xi\overline{a})\cdot\left((1-\beta)\,\frac{1}{\underline{b}}+\beta\frac{1}{\overline{b}}\right)=\left((1-\xi)\,\frac{\underline{a}}{\underline{b}}+\xi\frac{\overline{a}}{\overline{b}}\right).\end{array}\tag{4.3}$$

$$\begin{array}{l}U(\xi,[0,1])\,E(\beta,[0,1])\\ \qquad((1-\beta)\,\underline{a}+\beta\overline{a})\cdot\left((1-\xi)\,\underline{b}+\xi\overline{b}\right)=\left((1-\xi)\,\frac{\underline{a}}{\underline{b}}+\xi\frac{\overline{a}}{\overline{b}}\right).\end{array}\tag{4.4}$$

Demostració. A partir de les semàntiques del producte lineal i de l'element invers.

Observació. Si $C=A/^{\circ}B$, a partir de la semàntica parametritzada del quocient lineal, podem deduir

$$\begin{array}{l}U(a,A')\,E(b,B')\,E(c,C')\;\;a/b=c\text{ (Utilitzant 4.3)}\\ U(b,B')\,E(a,A')\,E(c,C')\;\;a/b=c\text{ (Utilitzant 4.4)}\\ U(c,C')\,E(a,A')\,E(b,B')\;\;a/b=c\text{ (Utilitzant 4.3)}\end{array}$$

Proposició 4.15 ***(Semàntica del producte lineal estès).***
Donats $A,B\in I^*(\mathbb{R})$ designats per $[\underline{a},\overline{a}]$ i $\left[\underline{b},\overline{b}\right]$, de forma que $0\notin$ simultàniament a l'interior d'A' i al de B'. El producte lineal estès

$$[\underline{a},\overline{a}]\circ\left[\underline{b},\overline{b}\right]=\left[\underline{ab}\,,\,\overline{a}\overline{b}\right]$$

verifica la següent semàntica (suposant, sense pèrdua de generalitat, que $0 \notin interior(A')$ *)*

$$U(\xi,[0,1])\,E(\beta,[0,1])$$

$$((1-\xi)\,\underline{a}+\xi\overline{a})\cdot\left((1-\beta)\,\underline{b}+\beta\overline{b}\right)=(1-\xi)\,\underline{ab}+\xi\overline{ab}.$$

Demostració. Suposem $0 \in interior(B')$ donat que en cas contrari es tractaria d'un producte lineal no estès.

Partim de la igualtat

$$((1-\xi)\,\underline{a}+\xi\overline{a})\left((1-\beta)\,\underline{b}+\beta\overline{b}\right)=\left((1-\xi)\,(\underline{ab})+\xi\left(\overline{ab}\right)\right)$$

i considerem

1. Si $(1-\xi)\,\underline{a}+\xi\overline{a}=0$, forçosament un extrem del interval A és zero. Ens caldrà tenir en compte les mateixes situacions que consideràvem en el producte lineal.

   (a) $\underline{a}=0$ i $\xi=0$
   (b) $\overline{a}=0$ i $\xi=1$
   (c) $\underline{a}=0$ i $\overline{a}=0$ i ξ qualsevol valor entre 0 i 1.

   d'on ja hem vist que s'obté $0\cdot\left(\beta\left(\overline{b}-\underline{b}\right)+\underline{b}\right)=0$ i per tant, β pot prendre qualsevol valor.

2. Si $(1-\xi)\,\underline{a}+\xi\overline{a}\neq 0$ podrem expressar

   $$(1-\beta)\,\underline{b}+\beta\overline{b}=\frac{(1-\xi)\,(\underline{ab})+\xi\left(\overline{ab}\right)}{(1-\xi)\,\underline{a}+\xi\overline{a}},$$

   és a dir,

   $$\beta\left(\overline{b}-\underline{b}\right)=\frac{\xi\overline{a}\left(\overline{b}-\underline{b}\right)}{(1-\xi)\,\underline{a}+\xi\overline{a}};$$

   però si $0\in interior(B')$ aleshores $\left(\overline{b}-\underline{b}\right)\neq 0$ i d'aquí

   $$\beta=\frac{\xi\overline{a}}{(1-\xi)\,\underline{a}+\xi\overline{a}}.$$

   La demostració donada pel producte lineal ens assegura que $\beta\in[0,1]$.

Observacions.

1. La condició que els intervals A i B no continguin simultàniament 0 en el seu interior no es supèrflua, como queda reflectit en el següent contraexemple:
$$[-1\,,\,1] \circ [-2\,,\,4] = [2,4]\,,$$
en que n'hi ha prou prenent $\xi = \frac{1}{2}$ per veure que no existeix cap valor $\beta \in [0,1]$ que verifiqui $a(\xi) \cdot b(\beta) = c(\xi)$ ja que
$$((1-\xi)\,\underline{a} + \xi\overline{a}) \cdot \left((1-\beta)\,\underline{b} + \beta\overline{b}\right) = \left((1-\xi)\,\underline{ab} + \xi\overline{ab}\right)$$
esdevé, en aquest cas, en
$$\underbrace{\left(\left(1-\tfrac{1}{2}\right)(-1) + \tfrac{1}{2}\right)}_{0} \cdot ((1-\beta)(-2) + \beta \cdot 4) = \underbrace{\left(\left(1-\tfrac{1}{2}\right) \cdot 2 + \tfrac{1}{2} \cdot 4\right)}_{3}.$$

2. Suposant que 0 pertany únicament a l'interior d'un dels intervals el paràmetre $\xi \in [0,1]$ que quantifiquem universalment no podrà ser assignat a aquest interval, com es posa de manifest en el següent contraexemple:
$$[-1,1] \circ [2,4] = [-2,4]\,,$$
prenent $\xi = \frac{1}{2}$ no existeix cap valor $\beta \in [0,1]$ verificant
$$\underbrace{\left(\left(1-\tfrac{1}{2}\right)(-1) + \tfrac{1}{2}\right)}_{0} \cdot ((1-\beta)\,2 + \beta \cdot 4) = \underbrace{\left(\left(1-\tfrac{1}{2}\right)(-2) + \tfrac{1}{2} \cdot 4\right)}_{1}.$$

3. El producte lineal estès dels intervals A i B ($A \circ B = C$) sempre complirà la semàntica
$$U\,(c, C')\, E\,(a, A')\, E\,(b, B')\;\; a \cdot b = c.$$
ja que per continuïtat de l'operador producte podem aplicar el teorema dels valors intermedis. Tanmateix, aquesta semàntica no ens permet d'obtenir la semàntica de parametrització lineal dels intervals que sí verifica el producte lineal.

4.4 Funcions racionals amb operadors lineals

Un cop estudiades les operacions lineals $+, \overset{\circ}{-}, /^{\circ}, \circ$, el següent pas consisteix a analitzar el comportament de les funcions en què els seus operands són aquestes operacions lineals. Per fer-ho, començarem definint el concepte d'extensió lineal i a continuació efectuarem l'estudi de la semàntica que portarà associada.

4.4.1 Extensió racional amb operadors lineals d'una funció racional contínua

Definició 4.16 ***(Extensió racional lineal d'una funció racional)***
Donada una funció racional[3]

$$\begin{array}{ccc} f:\mathbb{R}^k & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x_1,\ldots,x_k) & \longmapsto & y=f(x_1,\ldots,x_k) \end{array}$$

anomenem ***extensió racional lineal*** *de f i la representem per fL, a aquella funció intervalar*

$$fL: I^*\left(\mathbb{R}^k\right) \longrightarrow I^*(\mathbb{R})$$

que resulta de substituir en la funció f cada una de les operacions que la formen per la seva operació lineal intervalar equivalent i cada una de les variables reals $(x_1,\ldots,x_k)$ per variables intervalars $(X_1,\ldots,X_k)\in I^*\left(\mathbb{R}^k\right)$, sempre que

1. *$U(x_1,X_1')\ldots U(x_k,X_k')(x_1,\ldots,x_k)\in dom(f)$.*
2. *Estigui definida la semàntica de cada un dels operadors pels intervals als quals s'apliquin.*

Proposició 4.17 ***(Càlcul de l'extensió racional lineal a partir de les coordenades)***
Sigui $f:\mathbb{R}^k\to\mathbb{R}$ una funció racional i $fL: I^*\left(\mathbb{R}^k\right)\to I^*(\mathbb{R})$ la seva corresponent extensió racional lineal sobre els intervals $X_1,\ldots,X_k\in I^*(\mathbb{R})$. Si $Y=fL(X_1,\ldots,X_k)$ i $\forall i\in\{1,\ldots,k\}$ designem X_i per $[\underline{x}_i,\overline{x}_i]$, es complirà que

$$\left(Y=\left[\underline{y},\overline{y}\right]\right)\Leftrightarrow\left(\underline{y}=f(\underline{x}_1,\ldots,\underline{x}_k),\ \overline{y}=f(\overline{x}_1,\ldots,\overline{x}_k)\right).$$

Demostració. Per inducció sobre el nombre d'operadors que intervenen en la funció f.

- Si tenim un sol operador, en tractar-se de funcions racionals, aquest operador serà un dels estudiats $\left\{+,\overset{\circ}{-},/^\circ,\circ\right\}$. En aquest cas, la mateixa definició de l'operador ve efectuada a partir del corresponent operador real entre ínfims per un costat i entre suprems per l'altre, tal como ja hem vist en estudiar la propietat 6 en la pàgina 154.

[3] Aquella en què els seus operands poden ser únicament sumes, diferències, productes i quocients.

- Si per hipòtesis d'inducció suposem que la igualtat és certa per un determinat nombre $i-1$ d'operadors, anem a veure que la relació es verificarà també pel nombre i d'operadors que formin la funció f.

  Sigui *op.i* l'últim operador de la funció f. L'arbre sintàctic de la funció serà

$$\begin{array}{ccc} & f & \\ & \| & \\ & op.i & \\ & \nearrow \quad \nwarrow & \\ Y_1 & & Y_2 \end{array}$$

  d'on

$$\begin{aligned} Y_1 &= \left[\underline{y}_1, \overline{y}_1\right] = f_1 L\left(X_1, \ldots, X_k\right) \\ Y_2 &= \left[\underline{y}_2, \overline{y}_2\right] = f_2 L\left(X_1, \ldots, X_k\right) \end{aligned}$$

  essent f_1L i f_2L les extensions racionals lineals de les funcions f_1 i f_2 que vénen donades per les dues branques anteriors a l'operador i en l'arbre sintàctic de la funció f.

  Per la forma en què f_1 i f_2 han estat construïdes, podem assegurar que f_1 i f_2 estaran formades per menys de i operands i per tant, podrem aplicar hipòtesis d'inducció, resultant

$$\begin{aligned} &\left(Y_1 = \left[\underline{y}_1, \overline{y}_1\right] = f_1 L\left(X_1, \ldots, X_k\right)\right) \Leftrightarrow \\ &\quad \Leftrightarrow \left(\underline{y}_1 = f_1\left(\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_k\right), \overline{y}_1 = f_1\left(\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_k\right)\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\left(Y_2 = \left[\underline{y}_2, \overline{y}_2\right] = f_2 L\left(X_1, \ldots, X_k\right)\right) \Leftrightarrow \\ &\quad \Leftrightarrow \left(\underline{y}_2 = f_2\left(\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_k\right), \overline{y}_2 = f_2\left(\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_k\right)\right). \end{aligned}$$

Donat que l'últim operador de l'arbre sintàctic de la funció f compleix les hipòtesis d'inducció ($i = 1$) tindrem

$$\begin{aligned}
\left[\underline{y}, \overline{y}\right] &= Y = op.i\,(Y_1, Y_2) = op.i\left(\left[\underline{y}_1, \overline{y}_1\right], \left[\underline{y}_2, \overline{y}_2\right]\right) = \\
&= \left[op.i\left(\underline{y}_1, \underline{y}_2\right), op.i\,(\overline{y}_1, \overline{y}_2)\right] = \\
&= [op.i\,(f_1(\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_k), f_2(\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_k)), \\
&\qquad , op.i\,(f_1(\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_k), f_2(\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_k))] = \\
&= [f(\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_k),\ f(\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_k)]\,.
\end{aligned}$$

4.4.2 Semàntica de les extensions racionals lineals

En primer lloc ens cal remarcar que tot càlcul lineal que tingui un càlcul aritmètic equivalent admet com a interpretació semàntica la que tingui aquell equivalent aritmètic.

La següents proposicions analitzen semàntiques associades a les extensions lineals de funcions racionals reals.

Notació: En el successiu, donat un interval $A = [\underline{a}, \overline{a}]$, si $\gamma \in [0, 1]$ utilitzarem la notació $a(\gamma)$ per indicar el punt $(1 - \gamma)\,\underline{a} + \gamma\overline{a}$.

Proposició 4.18 ***(Semàntica d'extensions racionals lineals respecte d'una variable uniincident)***

Donada $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ una funció racional uniincident respecte de la variable x_i, si $Y = fL(X_1, \ldots, X_k)$ és l'extensió racional lineal de f sobre els intervals $(X_1, \ldots, X_k) \in I^*\left(\mathbb{R}^k\right)$, es compleix que

$$U(\xi, [0,1])\, E\left(\left(\beta_1, \ldots, \hat{\beta}_i, \ldots, \beta_k\right), [0,1]^{k-1}\right)$$

$$f(x_1(\beta_1), \ldots, x_i(\xi), \ldots, x_k(\beta_k)) = y(\xi)\,.$$

Demostració. Si la variable x_i és uniincident, anomenem ω_i l'operador que actua directament sobre ella; és a dir, escrivim $Z_i = \omega_i(X_i, Y)$ on Y pot ser una de les dades o un resultat parcial.

Apliquem la semàntica lineal al càlcul $Z_i = \omega_i(X_i, Y)$

$$U(\xi, [0,1])\, E(\beta, [0,1])\, (z_i(\xi) = \omega_i(x_i(\xi), y(\beta)))$$

Seguidament apliquem la semàntica lineal assignant el quantificador universal als resultats obtinguts en la branca de l'arbre en què apareixia la variable x_i. Amb això aconseguim el quantificador universal associat al resultat final i a la variable X_i.

Proposició 4.19 ***(Semàntica per funcions afins)***

Si $f : \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}$ és una funció afí respecte la variable x_i[4], que pot ser multiincident, i $Y = fL(X_1, \ldots, X_k)$ és l'extensió lineal de f sobre els intervals $(X_1, \ldots, X_k) \in I^*\left(\mathbb{R}^k\right)$, es compleix que

$$U(\xi, [0,1])\, E\left(\left(\beta_1, \ldots, \hat{\beta}_i, \ldots, \beta_k\right), [0,1]^{k-1}\right)$$

$$f(x_1(\beta_1), \ldots, x_i(\xi), \ldots, x_k(\beta_k)) = y(\xi).$$

Demostració. Suposem que la variable x_i és multiincident, ja que en cas contrari ens serveix l'anterior proposició 4.18. Per tractar-se d'una funció afí respecte la variable x_i, dues incidències d'aquesta mateixa variable només poden estar relacionades entre sí pels operadors suma o diferència.

Com a que el paràmetre en la interpretació semàntica per als operadors suma i diferència lineals és comú als operands (vegeu proposició 4.8), podrem assignar el quantificador universal a les totes les incidències de la variable x_i.

Proposició 4.20 ***(Semàntica de funcions racionals contínues)***

Donats els intervals $X_1, \ldots, X_k \in I^*\left(\mathbb{R}^k\right)$ i la funció racional $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ contínua en $prop(X_1, \ldots, X_k)$, si $Y = fL(X_1, \ldots, X_k)$, aleshores es compleix que

$$U(y, Y')\, E(x_1, X_1') \ldots E(x_k, X_k')\, y = f(x_1, \ldots, x_k).$$

Demostració. Per ser fL l'extensió racional lineal d'f, a partir de la proposició 4.17 resulta

$$\underline{y} = f(\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_n)\ ,\ \overline{y} = f(\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n),$$

i per ser f una funció contínua en $prop(X_1, \ldots, X_k)$, aplicant el teorema dels valors intermedis, la funció f cobrirà tots els valors compresos entre $\min\left\{\underline{y}, \overline{y}\right\}$ i $\max\left\{\underline{y}, \overline{y}\right\}$, el que en demostra la proposició[5].

[4]Entenem per funció afí respecte la variable x_i com aquella en la qual el grau respecte la variable x_i és 1 ó 0.

[5]Resultat equivalent al teorema semàntic dual en el qual Y' seria la truncació per defecte del domini de valors sobre $prop(X_1), \ldots, prop(X_k)$.

4.4.3 Semàntica d'expressions $A_1 \circ B_1 + \ldots + A_k \circ B_k = C$

Definició 4.21 ***(Forma canònica)***
Donats intervals $\{A_i, B_i\}_{i\in\{1,\ldots,k\}} \in I^*(\mathbb{R})$, *direm que l'expressió*

$$A_1 \circ B_1 + \cdots + A_k \circ B_k = C$$

ve donada en ***forma canònica****, quan totes les sumes siguin aritmètiques; és a dir, si existís alguna diferència lineal, aquesta hauria estat convertida en suma, modificant el corresponent terme* $\overset{\circ}{-} A_r \circ B_r$ *tal com indiquem*

$$\overset{\circ}{-} A_r \circ B_r = \left[-\underline{a_r}, -\overline{a_r}\right] \circ \left[\underline{b_r}, \overline{b_r}\right] = + \left[\underline{a_r}, \overline{a_r}\right] \circ \left[-\underline{b_r}, -\overline{b_r}\right].$$

Observació. Aplicant la proposició 4.20 a l'expressió en forma canònica

$$C = A_1 \circ B_1 + \cdots + A_k \circ B_k$$

deduïm que es compleix

$$U(c, C')\, E(a_1, A'_1) \ldots E(a_k, A'_k)$$

$$E(b_1, B'_1) \ldots E(b_k, B'_k)\, a_1 b_1 + \cdots + a_k b_k = c$$

perquè la funció

$$f((x_1, \ldots, x_k), (y_1, \ldots, y_k)) = x_1 y_1 + \cdots + x_k y_k$$

és contínua.

Cal destacar que l'expressió $A_1 \circ B_1 + \ldots + A_k \circ B_k = C$ pot tenir altres semàntiques (per exemple, la de funcions afins estudiada en la proposició 4.19). D'entre elles és important ressaltar la següent

Proposició 4.22 ***(Semàntica d'expressions en forma canònica)***
Donats els intervals $\{A_i, B_i\}_{i\in\{1,\ldots,k\}} \in I^*(\mathbb{R})$, *si* $\forall i \in \{1, \ldots, k\}$ $0 \notin$ *interior* (A_i) *i* $0 \notin$ *interior* (B_i), *l'expressió en forma canònica* $A_1 \circ B_1 + \ldots + A_k \circ B_k = C$, *verifica la semàntica parametritzada següent*

$$U(\xi, [0,1])\, E\left((\beta_1, \ldots, \beta_k), [0,1]^k\right) a_1(\xi)\, b_1(\beta_1) + \cdots + a_k(\xi)\, b_k(\beta_k) = c(\xi).$$

Demostració. Convenim a anomenar $C_i = A_i \circ B_i$.

Aplicant la semàntica del producte lineal (proposició 4.12) podem afirmar

$$U(\xi, [0,1])\, E(\beta_i, [0,1])\, (a_i(\xi)\, b_i(\beta_i) = c_i(\xi)). \tag{4.5}$$

Per ser $C = C_1 + \cdots + C_k$ i verificar-se la semàntica de la suma lineal estudiada en la proposició 4.8, tindrem

$$U(\xi, [0,1])\left((1-\xi)\underline{c}_1 + \xi\overline{c}_1\right) + \cdots + (1-\xi)\underline{c}_k + \xi\overline{c}_k = (1-\xi)\underline{c} + \xi\overline{c}. \quad (4.6)$$

Combinant ambdues expressions 4.5 i 4.6 queda demostrada la proposició, ja que donat $\xi \in [0,1]$ existiran $\beta_1, \ldots, \beta_k \in [0,1]$ complint

$$\begin{gathered} a_1(\xi)\, b_1(\beta_1) = c_1(\xi) \\ \vdots \\ a_k(\xi)\, b_k(\beta_k) = c_k(\xi) \end{gathered}$$

i per tant,

$$a_1(\xi)\, b_1(\beta_1) + \cdots + a_k(\xi)\, b_k(\beta_k) = c_1(\xi) + \cdots + c_k(\xi) = c(\xi).$$

Observació∘ L'anterior proposició va en principi referida al producte lineal i no al producte lineal estès. En el cas que es volgués aplicar per al producte lineal estès, ja que n'hi ha prou imposant que per a cada $i \in \{1, \ldots, k\}$, 0 no pugui pertànyer a l'interior d'A_i i al de B_i simultàniament, en el cas que 0 pertanyi a l'interior d'un dels dos, el quantificador universal no podria ser assignat a l'interval que el contingués.

4.5 Intervals de marques i càlculs lineals

4.5.1 El problema de les truncacions

Pel fet de treballar en qualsevol context digital, el resultat d'un càlcul s'obté amb un nombre determinat de xifres, un procés de càlcul intervalar haurà de resoldre el problema inevitable de les truncacions, que caldrà fer d'una forma determinada, si volem aplicar les semàntiques que hem estudiat.

El fet que marca la diferència entre les truncacions en operacions aritmètiques i operacions lineals és que mentre el resultat d'una operació aritmètica intervalar sempre és truncat de la mateixa forma[6], en tractar les operacions lineals, caldria truncar en funció de la semàntica a aplicar; és a dir, no hi haurà un tipus de truncació fixa. D'aquesta forma, si $Y \in I^*(\mathbb{R})$ és un interval que intervé en un càlcul lineal, en la semàntica d'aquest càlcul intervindrà també Y d'alguna de les dues formes següents

[6] La truncació en una operació intervalar aritmètica ha de ser feta de forma que $C \subseteq trunc(C)$ (truncació exterior). D'aquesta forma es garanteix la correcta aplicació del teorema $*-$semàntic. Aquesta truncació és independent de la modalitat de l'interval C.

1. $U(y, Y') \cdots$
2. $\cdots E(y, Y')$

Ambdues interpretacions seran independents de la modalitat d'aquell interval Y.

En treballar en una escala digital i estar obligats a efectuar truncacions dels resultats obtinguts, caldrà tenir en compte:

1. Si Y porta associat el quantificador universal, la truncació per Y haurà de ser feta de forma que $(trunc(Y))' \subseteq Y'$.

   Ens adonem que en aquest cas tenim

   - Si Y és impropi, $trunc(Y) = Out(Y)$.
   - Si Y és propi, $trunc(Y) = Inn(Y)$.

2. Si Y porta associat el quantificador existencial, la truncació per Y haurà de ser feta de forma que $Y' \subseteq (trunc(Y))'$.

   En aquest cas tenim

   - Si Y és impropi, $trunc(Y) = Inn(Y)$
   - Si Y és propi, $trunc(Y) = Out(Y)$

En efectuar un càlcul intervalar $fL(X_1, \ldots, X_k)$ en qualsevol context digital, hem de fer-lo directament amb una truncació. La dificultat que comporta conèixer de forma prèvia a un càlcul la modalitat del resultat d'una operació lineal, fa inviable construir un procés de truncació coherent amb la semàntica a aplicar. La solució a aquest problema la trobem en els intervals de marques.

4.5.2 Càlculs lineals entre intervals de marques

Definició 4.23 ***(Extensions racionals lineals sobre intervals de marques)***

*Sigui $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ una funció racional de la qual podem considerar la seva extensió lineal fL. Es defineix l'**extensió racional lineal sobre el conjunt d''intervals de marques** $I^*(\mathbb{M}(t,n,b))$ i la representem per $fL_{\mathbb{M}(t,n)}$ com la funció*

$$fL_{\mathbb{M}(t,n)} : I^*(\mathbb{M}(t,n))^k \longrightarrow I^*(\mathbb{M}(t,n)),$$

en la qual si $\mathfrak{X}_1, \ldots, \mathfrak{X}_k \in I^*(\mathbb{M}(t,n))$ *designant* $\forall i \in \{1, \ldots, k\}$ $\mathfrak{X}_i$ *per* $\left[\underline{X}_i, \overline{X}_i\right]$*, aleshores*

$$fL_{\mathbb{M}(t,n)}(\mathfrak{X}_1, \ldots, \mathfrak{X}_k) := \left[f_{\mathbb{M}(t,n)}(\underline{X}_1, \ldots, \underline{X}_k), f_{\mathbb{M}(t,n)}\left(\overline{X}_1, \ldots, \overline{X}_1\right)\right];$$

fent una coerció dels extrems obtinguts a la major de les seves granularitats, en cas que sigui necessari.

4.5.3 Semàntiques dels càlculs lineals a $I^*(\mathbb{M})$

Proposició 4.24 ***(Semàntica de funcions racionals contínues)***
Donada la funció racional $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$*, de la qual existeix l'extensió lineal* $fL_{\mathbb{M}(t,n)}$ *sobre els intervals de marques* $\mathfrak{X}_1, \ldots, \mathfrak{X}_k \in I^*(\mathbb{M}(t,n))$*, si* f *és contínua i* $\mathfrak{Z} = fL_{\mathbb{M}(t,n)}(\mathfrak{X}_1, \ldots, \mathfrak{X}_k)$*, aleshores es compleix que*

$$U(Z, \mathfrak{Z}')\, E(X_1, \mathfrak{X}_1') \ldots E(X_k, \mathfrak{X}_k')\;\; Z \approx_\alpha f_{\mathbb{M}(t,\infty)}(X_1, \ldots, X_k)$$

sempre que les granularitats implicades, calculades sota un criteri maximalista, siguin compatibles amb αt*.*

Demostració.
Anomenem $\mathfrak{Y} = \left[\underline{Y}, \overline{Y}\right] = fL_{\mathbb{M}(t,\infty)}(\mathfrak{X}_1, \ldots, \mathfrak{X}_k)$, i representem $\mathfrak{Z}$ per $\left[\underline{Z}, \overline{Z}\right]$. Amb un criteri maximalista del càlcul de la granularitat tindrem que

$$\begin{aligned} \underline{Y} &= fL_{\mathbb{M}(t,\infty)}(\underline{X}_1, \ldots, \underline{X}_k) \approx_\alpha \underline{Z} \\ \overline{Y} &= fL_{\mathbb{M}(t,\infty)}\left(\overline{X}_1, \ldots, \overline{X}_k\right) \approx_\alpha \overline{Z}, \end{aligned}$$

és a dir

$$\mathfrak{Y} \approx_\alpha \mathfrak{Z}$$

i per tant,

$$U(Z, \mathfrak{Z}')\, E(Y, \mathfrak{Y}')\;\; Z \approx_\alpha Y, \tag{4.7}$$

però utilitzant la proposició 4.20, pel fet de ser f contínua, es compleix que

$$\begin{gathered} U(y, \operatorname{ProjReal}(\mathfrak{Y}'))\, E\left((x_1, \ldots, x_k), \operatorname{ProjReal}(\mathfrak{X}_1, \ldots, \mathfrak{X}_k)'\right) \\ y = f(x_1, \ldots, x_k). \end{gathered}$$

Aplicant-ho al centre de la marca Y que apareix en l'expressió 4.7, podrem considerar les marques $X_1, \ldots, X_k, Y$ amb centres $x_1, \ldots, x_k$, $f(x_1, \ldots, x_k)$ respectivament, que verificaran la igualtat dèbil que volíem.

Proposició 4.25 ***(Semàntica minimalista)*** *Donada la funció racional i contínua $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$, de la que existeix l'extensió lineal $fL_{\mathbb{M}(t,n)}$ sobre els intervals de marques $\mathfrak{X}_1, \ldots, \mathfrak{X}_k \in I^*(\mathbb{M}(t,n))$, si $\mathfrak{Z} = fL_{\mathbb{M}(t,n)}(\mathfrak{X}_1, \ldots, \mathfrak{X}_k)$, aleshores es compleix que*

$$U\left(\underline{z} \in Iv'\left(\widetilde{\underline{Z}}\right), \ \overline{z} \in Iv'\left(\widetilde{\overline{Z}}\right)\right) E\left(\underline{x}_1 \in Iv'\left(\underline{X}_1\right), \ \overline{x}_1 \in Iv'\left(\overline{X}_1\right)\right), \ldots$$
$$\ldots, E\left(\underline{x}_k \in Iv'\left(\underline{X}_k\right), \ \overline{x}_k \in Iv'\left(\overline{X}_k\right)\right) \ [\underline{z}, \overline{z}] = fL\left([\underline{x}_1, \overline{x}_1], \ldots, [\underline{x}_k, \overline{x}_k]\right).$$

Demostració.
Si $\mathfrak{Z} = fL_{\mathbb{M}(t,n)}(\mathfrak{X}_1, \ldots, \mathfrak{X}_k)$ tindrem

$$\begin{aligned} \underline{Z} &= fL_{\mathbb{M}(t,n)}\left(\underline{X}_1, \ldots, \underline{X}_k\right) \\ \overline{Z} &= fL_{\mathbb{M}(t,n)}\left(\overline{X}_1, \ldots, \overline{X}_k\right) \end{aligned}$$

i a partir de la semàntica de les funcions de marques (teorema 2.65),

$$U\left(\underline{z}, Iv'\left(\widetilde{\underline{Z}}\right)\right) E\left(\underline{x}_1, Iv'\left(\underline{X}_1\right)\right), \ldots, E\left(\underline{x}_k, Iv'\left(\underline{X}_k\right)\right) \ \underline{z} = f\left(\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_k\right)$$
$$U\left(\overline{z}, Iv'\left(\widetilde{\overline{Z}}\right)\right) E\left(\overline{x}_1, Iv'\left(\overline{X}_1\right)\right), \ldots, E\left(\overline{x}_k, Iv'\left(\overline{X}_k\right)\right) \ \overline{z} = f\left(\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_k\right),$$

i per tant,

$$[\underline{z}, \overline{z}] = fL\left([\underline{x}_1, \overline{x}_1], \ldots, [\underline{x}_k, \overline{x}_k]\right).$$

Lema 4.26 ***(Parametrització d'un interval de marques)***

Siguin els intervals de marques $\mathfrak{Z}, \mathfrak{Y} \in I^*(\mathbb{M}(t,n))$ designats per $\left[\underline{Z}, \overline{Z}\right] = \langle [\underline{z}, \overline{z}], g_z \rangle$ i $\left[\underline{Y}, \overline{Y}\right] = \left\langle \left[\underline{y}, \overline{y}\right], g_y \right\rangle$.

Donat $\xi \in [0,1]$, si considerem $z(\xi) = (1-\xi)\underline{z} + \xi\overline{z}$ i $y(\xi) = (1-\xi)\underline{y} + \xi\overline{y}$, es compleix que

$$\mathfrak{Z} \approx_\alpha \mathfrak{Y} \Rightarrow \langle z(\xi), g \rangle \approx_\alpha \langle y(\xi), g \rangle,$$

sempre que les granularitats que intervenen siguin compatibles amb αt.

Demostració. Per simplificar el procés podem suposar que les marques que intervenen són positives,

Si $\mathfrak{Z} \approx_\alpha \mathfrak{Y}$, i per tant, $\underline{Z} \approx_\alpha \underline{Y}$, $\overline{Z} \approx_\alpha \overline{Y}$ es poden donar les següents situacions:

1. $\underline{y} \in Ind_\alpha \underline{Z}$ i $\overline{y} \in Ind_\alpha \overline{Z}$
2. $\underline{z} \in Ind_\alpha \underline{Y}$ i $\overline{z} \in Ind_\alpha \overline{Y}$
3. $\underline{y} \in Ind_\alpha \underline{Z}$ i $\overline{z} \in Ind_\alpha \overline{Y}$

4. $\underline{z} \in Ind_\alpha \underline{Y}$ i $\overline{y} \in Ind_\alpha \overline{Z}$

1. En suposar marques positives, podrem escriure

$$\left.\begin{array}{l} \underline{z}\,(1-\alpha t) \leq \underline{y} \leq \underline{z}\,(1+\alpha t) \\ \overline{z}\,(1-\alpha t) \leq \overline{y} \leq \overline{z}\,(1+\alpha t) \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{c} \underline{z}\,(1-\xi)\,(1-\alpha t) \leq \underline{y}\,(1-\xi) \leq \underline{z}\,(1-\xi)\,(1+\alpha t) \\ \overline{z}\xi\,(1-\alpha t) \leq \overline{y}\xi \leq \overline{z}\xi\,(1+\alpha t) \end{array}\right\}$$

i per tant,

$$\left(\underline{z}\,(1-\xi)+\overline{z}\xi\right)(1-\alpha t) \leq \underline{y}\,(1-\xi)+\overline{y}\xi \leq \left(\underline{z}\,(1-\xi)+\overline{z}\xi\right)(1+\alpha t)\,,$$

és a dir,

$$y\,(\xi) \in Ind_\alpha \left\langle z\,(\xi)\,, g\right\rangle.$$

2. Situació anàloga a 1. en què es demostra $z\,(\xi) \in Ind_\alpha \left\langle y\,(\xi)\,, g\right\rangle$.

3. Per no caure en cap de les dues situacions anteriors, suposem $\underline{z} \notin Ind_\alpha \underline{Y}$ i $\overline{y} \notin Ind_\alpha \overline{Z}$. Es complirà [7] per tant,

$$\underline{y} \in Ind_\alpha \underline{Z} \Leftrightarrow \underline{z}\,(1-\alpha t) \leq \underline{y} \leq \underline{z}\,(1+\alpha t) \tag{4.8}$$

$$\underline{z} \notin Ind_\alpha \underline{Y} \Leftrightarrow \underline{z} > \underline{y}\,(1+\alpha t) \tag{4.9}$$

$$\overline{z} \in Ind_\alpha \overline{Y} \Leftrightarrow \overline{y}\,(1-\alpha t) \leq \overline{z} \leq \overline{y}\,(1+\alpha t) \tag{4.10}$$

$$\overline{y} \notin Ind_\alpha \overline{Z} \Leftrightarrow \overline{y} > \overline{z}\,(1+\alpha t) \tag{4.11}$$

Sigui $\xi \in [0,1]$. Poden donar-se dues situacions:

a) $y\,(\xi) > z\,(\xi)$.

De la desigualtat vista a 4.9 es dedueix

$$\underline{y}\,(1-\alpha t) < \underline{y}\,(1+\alpha t) < \underline{z} \Rightarrow \underline{y}\,(1-\alpha t)\,(1-\xi) < \underline{z}\,(1-\xi) \tag{4.12}$$

[7] La relació $\underline{z} \notin Ind_\alpha \underline{Y}$ es tradueix en la desigualtat $\underline{z} > \underline{y}\,(1+\alpha t)$ i no en $\underline{z} < \underline{y}\,(1-\alpha t)$. Si es donés aquesta última tindríem $\underline{z}\,(1+\alpha t) < \underline{y}\left(1-\alpha^2 t^2\right) < \underline{y}$ i per tant, entraríem en contradicció amb la hipòtesi $\underline{y} \in Ind_\alpha \underline{Z}$. Pel mateix raonament, la relació $\overline{y} \notin Ind_\alpha \overline{Z}$ es tradueix en $\overline{y} > \overline{z}\,(1+\alpha t)$ ja que si es considerés la possibilitat $\overline{y} < \overline{z}\,(1-\alpha t)$ resultaria $\overline{y}\,(1+\alpha t) < \overline{z}\left(1-\alpha^2 t^2\right) < \overline{z}$, que contradiu la suposició que $\overline{z} \in Ind_\alpha \overline{Y}$.

i utilitzant la desigualtat vista a 4.10 tenim

$$\overline{y}\,(1-\alpha t)\,\xi \leq \overline{z}\xi. \tag{4.13}$$

De les expressions 4.12 i 4.13 s'obté

$$\left(\underline{y}\,(1-\xi)+\overline{y}\xi\right)(1-\alpha t) < z\,(\xi)\,. \tag{4.14}$$

La hipòtesi inicial $y\,(\xi) > z\,(\xi)$ ens porta que $z\,(\xi) < y\,(\xi)\,(1+\alpha t)\,.$ Combinant aquesta última desigualtat amb la desigualtat vista a 4.14 resulta

$$y\,(\xi)\,(1-\alpha t) < z\,(\xi) < y\,(\xi)\,(1+\alpha t)\,,$$

és a dir, $z\,(\xi) \in Ind_\alpha \left\langle y\,(\xi)\,, g\right\rangle.$

b) $y\,(\xi) < z\,(\xi)\,.$

Un raonament semblant a l'anterior ens porta, utilitzant 4.8, a

$$\underline{z}\,(1-\xi)\,(1-\alpha t) \leq \underline{y}\,(1-\xi)\,, \tag{4.15}$$

i utilitzant 4.11

$$\overline{z}\,(1-\alpha t) < \overline{z}\,(1+\alpha t) < \overline{y} \Rightarrow \overline{z}\,(1-\alpha t)\,\xi < \overline{y}\xi. \tag{4.16}$$

Combinant aquests resultats 4.15 i 4.16 amb el fet que $y\,(\xi) < z\,(\xi) \Rightarrow y\,(\xi) < z\,(\xi)\,(1+\alpha t)$, s'obté

$$z\,(\xi)\,(1-\alpha t) \leq y\,(\xi) \leq z\,(\xi)\,(1+\alpha t)\,,$$

és a dir, $y\,(\xi) \in Ind_\alpha \left\langle z\,(\xi)\,, g\right\rangle.$

4. Situació anàloga a l'anterior.

Proposició 4.27 ***(Semàntica d'extensions lineals sobre intervals de marques respecte d'una variable uniincident)***

Sigui $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ *una funció racional i contínua amb la variable* x_i *uniincident, i de la qual existeix l'extensió lineal* $fL_{\mathbb{M}(t,n)}$ *sobre els intervals de marques* $\mathfrak{X}_1, \ldots, \mathfrak{X}_k \in I^*\left(\mathbb{M}\,(t,n)\right).$

Si $\mathfrak{Z} = fL_{\mathbb{M}(t,n)}\,(\mathfrak{X}_1, \ldots, \mathfrak{X}_k)$ *i les granularitats resultants, calculades sota un criteri maximalista, són compatibles amb* αt*, es compleix que*

$$U\,(\xi,[0,1])\,E\left(\left(\beta_1,\ldots,\hat{\beta}_i,\ldots,\beta_k\right),[0,1]^{k-1}\right)$$

$$\left\langle f\,(x_1\,(\beta_1)\,,\ldots,x_i\,(\xi)\,,\ldots,x_k\,(\beta_k))\,, g_z\right\rangle \approx_\alpha \left\langle z\,(\xi)\,, g_z\right\rangle.$$

Demostració. Convenim a anomenar $\mathfrak{Y} = fL_{\mathbb{M}(t,\infty)}(\mathfrak{X}_1, \ldots, \mathfrak{X}_k)$, i suposem $X_1 = \mathrm{ProjReal}(\mathfrak{X}_1), \ldots, X_k = \mathrm{ProjReal}(\mathfrak{X}_k), Y = \mathrm{ProjReal}(\mathfrak{Y})$, d'on tindrem, aplicant la proposició 4.18

$$U(\xi, [0,1])\, E\left(\left(\beta_1, \ldots, \hat{\beta}_i, \ldots, \beta_k\right), [0,1]^{k-1}\right)$$

$$f(x_1(\beta_1), \ldots, x_i(\xi), \ldots, x_k(\beta_k)) = y(\xi).$$

D'acord amb la proposició 2.66, es complirà $\mathfrak{Z} \approx_\alpha \mathfrak{Y}$, ja que

$$\begin{array}{c} \underline{Z} = fL_{\mathbb{M}(t,n)}(\underline{X}_1, \ldots, \underline{X}_k) \approx_\alpha fL_{\mathbb{M}(t,\infty)}(\underline{X}_1, \ldots, \underline{X}_k) = \underline{Y} \\ \overline{Z} = fL_{\mathbb{M}(t,n)}\left(\overline{X}_1, \ldots, \overline{X}_k\right) \approx_\alpha fL_{\mathbb{M}(t,\infty)}\left(\overline{X}_1, \ldots, \overline{X}_k\right) = \overline{Y} \end{array}$$

i per tant, utilitzant el lema anterior (lema 4.26), si $\xi \in [0,1]$ aleshores $\langle z(\xi), g_z\rangle \approx_\alpha \langle y(\xi), g_y\rangle$ quan les granularitats siguin compatibles amb αt. D'aquesta forma, doncs,

$$U(\xi, [0,1])\, E\left(\left(\beta_1, \ldots, \hat{\beta}_i, \ldots, \beta_k\right), [0,1]^{k-1}\right)$$

$$\langle f(x_1(\beta_1), \ldots, x_i(\xi), \ldots, x_k(\beta_k)), g_y\rangle = \langle y(\xi), g_y\rangle \approx_\alpha \langle z(\xi), g_z\rangle.$$

Proposició 4.28 ***(Semàntica per a funcions afins sobre intervals de marques)***

Sigui $f : \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}$ és una funció afí respecte la variable x_i, (que pot ser multiincident) i tal que f admeti extensió lineal $fL_{\mathbb{M}(t,n)}$ sobre els intervals de marques $\mathfrak{X}_1, \ldots, \mathfrak{X}_k \in I^*(\mathbb{M}(t,n))$.

Si $\mathfrak{Z} = fL_{\mathbb{M}(t,n)}(\mathfrak{X}_1, \ldots, \mathfrak{X}_k)$ i les granularitats resultants, calculades sota un criteri maximalista, són compatibles amb αt, es verifica

$$U(\xi, [0,1])\, E\left(\left(\beta_1, \ldots, \hat{\beta}_i, \ldots, \beta_k\right), [0,1]^{k-1}\right)$$

$$\langle f(x_1(\beta_1), \ldots, x_i(\xi), \ldots, x_k(\beta_k)), g_z\rangle \approx_\alpha \langle z(\xi), g_z\rangle.$$

Demostració. Conseqüència de l'aplicació del lema 4.26 a la proposició 4.19.

Proposició 4.29 ***(Semàntica d'expressions $\mathfrak{A}_1 \circ \mathfrak{B}_1 + \ldots + \mathfrak{A}_k \circ \mathfrak{B}_k$)***

Donada la funció $f((x_1, \ldots, x_k), (y_1, \ldots, y_k)) = x_1 \cdot y_1 + \cdots + x_k \cdot y_k$, i donats els intervals de marques $\{\mathfrak{A}_i, \mathfrak{B}_i\}_{i=1,\ldots,k} \in I^*(\mathbb{M}(t,n))$ tals que $\forall i \in \{1, \ldots, k\}$ $0 \notin$ interior (ProjReal$(\mathfrak{A}_i)$) i $0 \notin$ interior (ProjReal$(\mathfrak{B}_i)$), si $\mathfrak{C} = fL_{\mathbb{M}(t,n)}((\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_k), (\mathfrak{B}_1, \ldots, \mathfrak{B}_k))$ i si les granularitats resultants, *calculades sota un criteri maximalista, són compatibles amb* αt, *podrem afirmar*

$$U(\xi, [0,1])\, E\left((\beta_1, \ldots, \beta_k), [0,1]^k\right)$$

$$\langle a_1(\xi) \cdot b_1(\beta_1), \ldots, a_k(\xi) \cdot b_k(\beta_k), g_c\rangle \approx_\alpha \langle c(\xi), g\rangle .$$

Demostració. Conseqüència de l'aplicació del lema 4.26 a la proposició 4.22.

Capítol 5

Conclusions

Els objectius que originàriament es perseguien en l'elaboració d'aquesta tesi, la fonamentació intervalar del problema de l'optimització, s'han vist modificats a mesura que s'avançava en la resolució d'aquell problema.

Després de tot l'estudi que s'ha dut a terme, es fa necessari tornar enrere i reflexionar sobre tres punts: per un costat, els motius que han fet necessari el plantejament de la tesi; per altra banda, en quina situació queda l'anàlisi intervalar modal després de les aportacions que fem en aquest treball; i en tercer lloc, hem de preguntar-nos quins seran els passos que caldrà fer en un futur relacionats amb els resultats obtinguts.

Com ja s'ha dit anteriorment, el sistema de les marques ha vingut motivat pel problema de les truncacions de les operacions lineals: és impossible plantejar una truncació en un càlcul lineal sense conèixer prèviament el seu resultat. Inicialment es va pretendre resoldre el problema dins del mateix context intervalar. El problema que va obligar-nos a abandonar aquest tractament va ser el de la impossibilitat de tractar, des de dins del sistema dels intervals modals (intervals de variació), situacions que en realitat corresponien a intervals de indiscernibilitat, en els quals les multiinciències impròpies donen lloc a lectures indiscernibles. Cal mencionar, però, que la necessitat d'introduir el concepte de la indiscernibilitat va sorgir a partir d'aquest intent. L'error conceptual que en aquell moment teníem era el de creure que era possible de senyalar elements diferents dins d'un interval d'indiscernibilitat. Aquest fet, que en el fons ens mostra que des de dins del sistema dels intervals modals no és possible resoldre el problema que plantejàvem, és el que va provocar que el camí que seguíem no pogués ser la solució buscada. Els elements que utilitzàvem en aquest primer intent els vàrem anomenar *pixels*. És important mencionar que sota aquest punt de vista inicial, el pas següent, que no era altre que l'elaboració dels *intervals de pixels* podia ser tractat com un subsistema del conjunt dels *twins* (Vegeu Gardeñes, E. [10])

De l'experiència que acabem de descriure es varen poder extreure punts de vista que caldria tenir en compte en qualsevol altre estudi encaminat a resoldre el problema que ens ocupa. Aquests punts de vista serien:

1. El concepte d'indiscernibilitat hauria d'anar associat als intervals impropis.

2. La indiscernibilitat cal considerar-la al voltant d'un punt.

3. Encara que seguim associant la indiscernibilitat als intervals, el sistema que s'haurà de construir serà diferent al sistema dels intervals modals. Aquesta diferència caldrà que estigui constituïda per les operacions i les relacions que s'hi defineixin.

Partint d'aquests condicionants, l'orientació del estudi que estàvem fent ens va portar al concepte de marca, que admet dos punts de vista diferents:

1. La marca té sentit per sí sola; és a dir, el sistema de marques, amb les operacions i relacions definides, té entitat pròpia com a sistema de tractament dels intervals d'indiscernibilitat, enfront el sistema dels intervals modals que tracten els intervals de variació.

2. L'aplicació del sistema de les marques als extrems dels intervals ha donat lloc als intervals de marques, que estenen el concepte d'interval modal a un sistema superior.

La construcció de les marques ha fet necessari un estudi exhaustiu dels sistemes de mesura, anant més enllà del simple concepte de mesura que consisteix únicament a assignar nombres a processos, objectes ... En aquest aspecte compartim la idea de mesura de Kyburg, H (vegeu [13]) que suggereix un tractament més enllà de la mesura com a *nombre*, que no deixaria de ser una entitat teòrica.

Però les aportacions que aquesta tesi ha fet als intervals modals no queden reduïdes al sistema de marques. El context intervalar lineal, que constructivament està descrit parcialment a Gardeñes, E. *Approaches to Simulation and to the Linear Problem in the SIGLA System* (Vegeu [9]) quedava incomplert sota alguns punts de vista. Concretament,

1. Calia introduir les extensions de funcions racionals reals sobre funcions intervalars amb operadors lineals.

2. La deficiència més gran del sistema intervalar amb les operacions lineals era la manca de l'estudi de la semàntica que aquelles operacions portaven associades.

L'estudi exhaustiu de la semàntica de les operacions lineals ens ha permès aconseguir una semàntica parametritzada -que és aportada per la idea subjacent de segment que tot interval té. A partir d'aquí ha estat possible donar interpretació als sistemes d'equacions lineals amb operacions lineals.

Finalment ens hem proposat d'analitzar quins són els passos que cal fer en un futur, ja que és obligat reconèixer que el sistema de les marques, tal com queda en aquest treball, resta incomplert. Els objectius de cara a un futur són clars: és imprescindible d'implementar l'aritmètica de marques. En l'elaboració d'aquesta aritmètica apareixeran situacions en què la teoria descrita deixa obertes diferents possibilitats d'actuació -per exemple, davant l'augment inesperat de la granularitat, sobrepassant els límits establerts, pot ser interessant plantejar un canvi de tipus que permeti avançar en el càlcul.

Podran aparèixer també imperatius per part del programador que obliguin a canviar alguns dels supòsits que s'han fet, segurament referents al valor de la granularitat.

Implementada l'aritmètica de marques, s'obre la possibilitat de modificar els programes d'aritmètica intervalar per incloure-hi l'opció de treballar amb intervals de marques.

El fet que la implementació de l'aritmètica de marques pugui fer retocar alguns punts descrits en la teoria ens porta a reconèixer que aquesta no té un caràcter definitiu, encara que els problemes que pugui ocasionar la implementació seran problemes de detalls que ens atrevim a qualificar de "tècnics"; entenent amb això, que en cap cas modificaran els conceptes que es descriuen i per tant, no afectaran l'essència de l'estudi que hem efectuat.

Personalment, però, la continuació d'aquesta tesi voldria encaminar-la a l'aprofundiment del context lineal, ja que obre les portes a una vessant del món intervalar completament descuidada. En realitat, el sistema de marques aconsegueix fer operatives les operacions lineals, és a dir, ens permet realment fer operacions lineals, i la semàntica obtinguda ens permet fer interpretables els resultats lineals obtinguts. Molts problemes matemàtics no són abordables des d'aquest punt de vista, però tinc al davant una porta oberta al plantejament de nous problemes intervalars. Són aquells problemes de caire geomètric que fins ara eren intocables sota la visió dels intervals modals amb les operacions aritmètiques.

Apèndix A

Sistemes d'equacions lineals

Els sistemes d'equacions lineals intervalars poden ser tractats des de dos punts de vista: el de les operacions aritmètiques i el de les operacions lineals. Molts estudis que s'han dut a terme han estat encaminats a resoldre sistemes d'equacions intervalars aritmètics. La introducció de les marques ha permès obtenir un mètode general de resolució dels sistemes amb operacions lineals. No podem oblidar, però, que la dificultat aparentment insalvable que sovint es presenta en els sistemes aritmètics és la de la interpretació semàntica quan alguna de les incògnites és multiincident i té modalitat impròpia. Hem de destacar que hi ha estudis sobre la resolució de sistemes d'equacions aritmètics des del punt de vista dels intervals clàssics. D'entre ells, l'estudi efectuat per Shary, P (Vegeu [24], [25], [26] i [27]) és el més proper als intervals modals. També en l'aspecte de la resolució dels sistemes aritmètics hem de mencionar els recents estudis que hem dut a terme (Vegeu [22] i [23]).

Els sistemes amb operacions lineals obren la porta al fet que, sota determinades circumstàncies un sistema aritmètic en principi no interpretable, sí que ho sigui sota el punt de vista lineal i, a l'inrevés, també un sistema amb operacions lineals pot admetre sota certes condicions que sigui interpretat des del punt de vista de les operacions aritmètiques.

La resolució de sistemes d'equacions intervalars presenta, doncs, un problema doble que podem resumir de la forma següent:

- En un sistema aritmètic, si la modalitat d'alguna de les incògnites és impròpia, i si aquesta incògnita es repeteix en més d'una equació (fet que succeirà en molts cassos), el sistema no és directament interpretable a partir de la semàntica de f^*, sense aplicar-hi coercions.

Fixem-nos, a més, que la modalitat de les incògnites quedarà determinada un cop resolt el sistema, pels sistemes sense coercions.

- En un sistema amb operacions lineals, al qual estrictament li correspon una aritmètica exacta, cal plantejar un mètode de resolució compatible amb una aritmètica truncada de marques.

El primer d'aquests problemes és irresoluble sense coercions: el sistema no seria en aquest cas intervalarment interpretable a partir de la semàntica de f^*.

El segon problema que hem exposat queda efectivament resolt a partir de la utilització dels intervals de marques però obliga a tenir en compte la filosofia de les marques des de la mateixa determinació de les dades.

A.1 Plantejament del problema

El concepte de sistema d'equacions lineals intervalars es construeix de forma natural a partir del concepte de sistema d'equacions lineals reals; és a dir, donats $m, n \in \mathbb{N}$, un sistema lineal intervalar de m equacions i de n incògnites, sense coercions, el representem de la forma

$$\left\{ \begin{array}{ccc} A_{11} \cdot X_1 + \cdots + A_{1n} \cdot X_n & = & B_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{m1} \cdot X_1 + \cdots + A_{mn} \cdot X_n & = & B_m \end{array} \right. \tag{A.1}$$

on $\forall i \in \{1, \ldots, m\}, \forall j \in \{1, \ldots, n\}, A_{ij} \in I^*(\mathbb{R})$ són els coeficients intervalars del sistema; $B_i \in I^*(\mathbb{R})$ són els termes independents intervalars i $X_j \in I^*(\mathbb{R})$ són les incògnites del sistema.

L'operació $\cdot$ indica que es tracta d'un producte i podrà ser

$$\cdot := \left\{ \begin{array}{l} * \text{ si es tracta d'un sistema amb operacions aritmètiques} \\ \\ \circ \text{ si es tracta d'un sistema amb operacions lineals.} \end{array} \right.$$

tenint present que el producte lineal està definit per intervals que no continguin zero en el seu interior.

La solució exacta del sistema estarà formada per aquells intervals que, substituïts en totes les equacions, compleixin simultàniament totes les igualtats.

A.2 Sistemes lineals amb operacions aritmètiques

Donat el sistema lineal

$$\left\{\begin{array}{ccc} A_{11} * X_1 + \cdots + A_{1n} * X_n & = & B_1 \\ \vdots & & \vdots \\ A_{m1} * X_1 + \cdots + A_{mn} * X_n & = & B_m \end{array}\right. \tag{A.2}$$

amb operacions aritmétiques, per poder interpretar-lo a partir de la semàntica de f^*, caldrà que calculem intervals $Y_1, \ldots, Y_n$ que compleixin

$$\left\{\begin{array}{ccc} A_{11} * Y_1 + \cdots + A_{1n} * Y_n & \subseteq & B_1 \\ \vdots & & \vdots \\ A_{m1} * Y_1 + \cdots + A_{mn} * Y_n & \subseteq & B_m \end{array}\right.$$

i que direm que són **solució**[1] del sistema A.2.

Caldrà tenir en compte que, en cas de ser necessari, les truncacions pels coeficients $(A_{ij})_{\substack{i\in\{1,\ldots,m\} \\ j\in\{1,\ldots,n\}}}$ hauran de ser truncacions **externes**, mentre que pels termes independents $(B_i)_{i\in\{1,\ldots,m\}}$, les truncacions seran les **internes**. Cal matisar que molts cops aquests coeficients i termes independents vindran donats i, per tant, no caldrà efectuar truncacions.

Ens proposem estudiar a continuació la seva resolució.

Donats $A, B \in I^*(\mathbb{R})$ degudament truncats si és necessari, els dos casos més simples que podem plantejar-nos són la resolució de les equacions $A + X = B$ i $A * X = B$

1. Volem resoldre l'equació $A + X = B$. Si busquem $Y \in I^*(\mathbb{R})$ tal que $A + Out(Y) \subseteq B$, resultará

   $$Out(Y) \subseteq Inn(B - dual(A))$$

   ja que

   $$A + Out(Y) \subseteq A + Inn(B - dual(A)) \subseteq A + (B - du(A)) = B$$

   En general, doncs, i en funció de l'aritmètica escollirem

   $$Out(Y) = Inn(B - du(A))$$

[1] Solució no forçosament exacta ni òptima ni única.

La solució Y buscada[2] complirà en realitat

$$Y \subseteq Inn\,(B - du\,(A))$$

i podrem prendre, per tant,

$$Y = Inn\,(B - du\,(A))$$

2. Volem resoldre l'equació $A * X = B$. Si busquem $Y \in I^*(\mathbb{R})$ tal que $A * Out\,(Y) \subseteq B$, sempre que $0 \notin A'$, resultarà

$$Out\,(Y) \subseteq Inn\left(\frac{B}{du\,(A)}\right)$$

ja que

$$A * Out\,(Y) \subseteq A * Inn\left(\frac{B}{du\,(A)}\right) \subseteq A * \frac{B}{du\,(A)} = B$$

En general escollirem

$$Out\,(Y) = Inn\left(\frac{B}{du\,(A)}\right)$$

La solució buscada en realitat complirà

$$Y \subseteq Inn\left(\frac{B}{du\,(A)}\right)$$

i podrem prendre, per tant,

$$Y = Inn\left(\frac{B}{du\,(A)}\right)$$

Per resoldre un sistema d'equacions en general, procedirem de la forma següent:

Donats $(A_{ij})_{\substack{i\in\{1,\ldots,m\}\\ j\in\{1,\ldots,n\}}}, (B_i)_{i\in\{1,\ldots,m\}} \in I^*(\mathbb{R})$ coeficients i termes independents del sistema d'equacions lineals intervalar

$$\left\{\begin{array}{c} A_{11} * X_1 + \cdots + A_{1n} * X_n = B_1 \\ \vdots \\ A_{m1} * X_1 + \cdots + A_{mn} * X_n = B_m \end{array}\right. \tag{A.3}$$

truncats convenientment en cas de ser necessari, podem recolzar-nos en els resultats descrits en les subseccions següents.

[2]El terme $Out\,(Y)$ el prenem per protegir-nos d'eventuals necessitats de truncació de l'interval Y, que és el que realment busquem. Cal tenir present que si Y és solució, també ho seran tots els intervals inclosos en Y.

A.2.1 Igualació dels coeficients d'una incògnita

Proposició A.1 ***(Producte d'una equació per un interval)***
Si prenem una de les equacions del nostre sistema donat en l'expressió A.3

$$A_{i1} * X_1 + \cdots + A_{in} * X_n = B_i,$$

donat un interval $M \in I^*(\mathbb{R})$ *tal que* $0 \notin M'$, *si* M *és* ***propi*** *i* $Y_1, \ldots, Y_n$ *són intervals modals que compleixen*

$$\underbrace{((Out\,(M) * A_{i1}) * Y_1) + \cdots + ((Out\,(M) * A_{in}) * Y_n)}_{\substack{\textit{Operacions fetes amb} \\ \textit{truncació externa}}} \subseteq \underbrace{Inn\,(M) * B_i}_{\substack{\textit{Operació feta amb} \\ \textit{truncació interna}}}$$

aleshores $Y_1, \ldots, Y_n$ *són solució, compatible amb la semàntica de* f^*, *de l'equació*

$$A_{i1} * X_1 + \cdots + A_{in} * X_n = B_i$$

Demostració. Calculem $A_{i1} * Y_1 + \cdots + A_{in} * Y_n$ de la següent forma:

$$A_{i1} * Y_1 + \cdots + A_{in} * Y_n = \underbrace{\frac{M}{du\,(M)}}_{\text{Valor exacte}} (A_{i1} * Y_1 + \cdots + A_{in} * Y_n)$$

Pel fet de ser M propi, aplicant la subdistributivitat del producte respecte de la suma intervalar[3] (vegeu [37, pàg 85]) resultarà

$$\begin{aligned} A_{i1} * Y_1 + \cdots + A_{in} * Y_n = {} & \tfrac{M}{du(M)} (A_{i1} * Y_1 + \cdots + A_{in} * Y_n) \subseteq \\ \subseteq {} & \tfrac{1}{du(M)} \left(\underbrace{(M * A_{i1}) * Y_1 + \cdots + (M * A_{in}) * Y_n}_{\text{operacions exactes}} \right) \subseteq \\ \subseteq {} & \tfrac{1}{du(M)} \left(\underbrace{(M * A_{i1}) * Y_1 + \cdots + (M * A_{in}) * Y_n}_{\text{operacions fetes amb truncació externa}} \right). \end{aligned} \tag{A.4}$$

[3]Donats $A, B, C \in I^*(\mathbb{R})$, en el càlcul de $A * (B + C)$ es compleix:
Si A és propi, $A * (B + C) \subseteq A * B + A * C$
Si A és impropi, $A * (B + C) \supseteq A * B + A * C$

Per ser $Y_1, \ldots, Y_n \in I^*(\mathbb{R})$ intervals modals que verifiquen

$$\underbrace{((Out\,(M) * A_{i1}) * Y_1) + \cdots + ((Out\,(M) * A_{in}) * Y_n)}_{\substack{\text{Operacions fetes amb} \\ \text{truncació externa}}} \subseteq \underbrace{Inn\,(M) * B_i}_{\substack{\text{Operació feta amb} \\ \text{truncació interna}}}$$

es complirà

$$\underbrace{((M * A_{i1}) * Y_1) + \cdots + ((M * A_{in}) * Y_n)}_{\substack{\text{Operacions fetes amb} \\ \text{truncació externa}}} \subseteq \underbrace{M * B_i}_{\substack{\text{Operació feta amb} \\ \text{truncació interna}}}$$

i per tant, si utilitzem les inclusions donades en l'expressió A.4, tindrem

$$A_{i1} * Y_1 + \cdots + A_{in} * Y_n \subseteq \frac{1}{du\,(M)} * M * B_i = B_i$$

expressió equivalent a que $Y_1, \ldots, Y_n$ són solució de

$$A_{i1} * X_1 + \cdots + A_{in} * X_n = B_i.$$

Lema A.2 *Donat $M \in I^*(\mathbb{R})$, si $0 \notin M'$ aleshores*

1. *M propi $\Rightarrow \frac{1}{du(M)}$ impropi.*
2. *M impropi $\Rightarrow \frac{1}{du(M)}$ propi*

La demostració la fem utilitzant la semàntica de

$$M * \frac{1}{du\,(M)} = [1, 1]$$

Excepte en el cas que M fos puntual, si M i $du\,(M)$ tinguessin la mateixa modalitat es compliria, utilitzant la semàntica de f^* o la de f^{**}

$$U\,(x, M')\,U\left(y, \left(\frac{1}{du\,(M)}\right)'\right)(xy = 1)$$

evidentment fals.

Proposició A.3 ***(Reducció d'un coeficient impropi a la unitat)***
Si d'una de les equacions del sistema descrit en l'expressió A.3, (suposem, per simplificar, la $i-$éssima equació)

$$A_{i1} * X_1 + \cdots + A_{in} * X_n = B_i$$

*en volem convertir el coeficient **impropi** d'una de les incògnites a la unitat, (per simplificar, suposem que el coeficient A_{i1} és impropi i que volem convertir-lo a la unitat), si $0 \notin A'_{i1}$ prendrem l'interval propi $\dfrac{1}{du\,(A_{i1})}$ i multiplicarem per ell ambdós membres de la igualtat.*

Demostració.

A partir del lema A.2, si el coeficient A_{i1} és impropi, tindrem que l'interval $\frac{1}{du(A_{i1})}$ és propi, i per tant, podrem aplicar la proposición A.1, tenint en compte que les truncacions hauran de ser externes quan multipliquem els coeficients del sistema i internes en multiplicar els termes independents. D'aquesta forma, si $Y_1, \cdots, Y_n$ són intervals modals que verifiquen la inclusió

$$\left(\underbrace{Y_1 + \cdots + \left(\frac{1}{du\,(A_{i1})} * A_{in} \right) * Y_n}_{\text{operacions fetes amb truncació externa}} \right) \subseteq \underbrace{\frac{1}{du\,(A_{i1})} * B_i}_{\substack{\text{operacions fetes amb} \\ \text{truncació interna}}}$$

es complirà que $Y_1, \ldots, Y_n$ és una solució de l'equació

$$A_{i1} * X_1 + \cdots + A_{in} * X_n = B_i$$

Observació 1 ***(Igualació dels coeficients en un sistema)***

Suposem que de les equacions del sistema donat en l'expressió A.3, en volem igualar els coeficients d'una incògnita a dues de les equacions (per simplificar, suposem que volem igualar els coeficients de la incògnita X_1 de les dues primeres equacions)

$$\begin{cases} A_{11} * X_1 + \cdots + A_{1n} * X_n = B_1 \\ A_{21} * X_1 + \cdots + A_{2n} * X_n = B_2 \end{cases}$$

A partir de les proposicions A.1 i A.3 analitzem els casos següents

- *A_{11} propi i A_{21} propi.*

  Multipliquem cada coeficient de la primera equació i el seu terme independent per A_{21}, i cada coeficient de la segona equació i el seu terme independent per A_{11}.

- *A_{11} impropi i A_{21} propi.*

  Convertim en unitat el coeficient de la incògnita X_1 de la primera equació, multiplicant tots els coeficients i el terme independent de la primera equació per $\dfrac{1}{du\,(A_{11})}$. En aquest cas caldrà que $0 \notin A'_{11}$. A l'equació resultant multipliquem cada un dels coeficients i el terme independent per A_{21}.

- *A_{11} propi y A_{21} impropi.*

  Convertim en unitat el coeficient de la incògnita X_1 de la segona equació, multiplicant tots els coeficients i el teme independent de la segona equació per $\dfrac{1}{du\,(A_{21})}$. En aquest cas caldrà que $0 \notin A'_{21}$. A l'equació resultant multipliquem cada un dels coeficients i el terme independent per A_{11}.

- *A_{11} impropi i A_{21} impropi.*

  Convertim en unitat els coeficientes de la incògnita X_1 d'ambdues equacions, multiplicant tots els coeficients i el terme independent de la primera equació per $\dfrac{1}{du\,(A_{11})}$, i tots els coeficients i terme independent de la segona equació per $\dfrac{1}{du\,(A_{21})}$. En aquest cas caldrà que $0 \notin A'_{11}$ i que $0 \notin A'_{21}$. Les equacions resultants tindran el coeficient de la incògnita X_1 igual a la unitat.

A.2.2 Eliminació d'una incògnita en un sistema

Un cop hem igualat els coeficients d'una incògnita en un sistema lineal d'equacions intervalars, ens proposem eliminar aquesta incògnita en totes les equacions excepte en una d'elles. Per simplificar, ens limitarem a l'estudi de dues equacions.

Lema A.4 *Donats $A, B \in I^*(\mathbb{R})$, si B és impropi es verifica*

$$(-du\,(A)) * B \subseteq -du\,(A * B)$$

Demostració.

Aplicant la propietat

$$du\,(A * B) = du\,(A) * du\,(B)$$

tindrem

$$-du\,(A * B) = -\,(du\,(A) * du\,(B)) = (-du\,(A) * du\,(B))$$

i pel fet de ser B impropi, tindrem $B \subseteq du\,(B)$ i per tant,

$$-du\,(A) * du\,(B) \supseteq -du\,(A) * B;$$

és a dir,

$$-du\,(A) * B \subseteq -du\,(A * B)$$

Lema A.5 *Donats* $A, B \in I^*(\mathbb{R})$, *es verifica*

$$-du\,(A) - du\,(B) = -du\,(A+B)$$

Demostració.

Prenent $A = [\underline{a}\,,\,\overline{a}]$, $B = \left[\underline{b}\,,\,\overline{b}\right]$ s'obté

$$\begin{aligned} -du\,[\underline{a}\,,\,\overline{a}] - du\left[\underline{b}\,,\,\overline{b}\right] &= -[\overline{a}\,,\,\underline{a}] - \left[\overline{b}\,,\,\underline{b}\right] = \\ &= [-\underline{a}\,,\,-\overline{a}] - \left[\overline{b}\,,\,\underline{b}\right] = \\ &= \left[-\underline{a} - \underline{b}\,,\,-\overline{a} - \overline{b}\right] = -du\,(A+B) \end{aligned}$$

Proposició A.6 ***(Diferència d'equacions coeficient a coeficient)***

Si del sistema d'equacions lineals intervalar donat en l'expressió A.3, en prenem dues de les equacions (per simplificar en prendrem les dues primeres); és a dir,

$$\left\{ \begin{array}{l} A_{11} * X_1 + \cdots + A_{1n} * X_n = B_1 \\ A_{21} * X_1 + \cdots + A_{2n} * X_n = B_2 \end{array} \right. \tag{A.5}$$

aleshores, si $Y_1, \cdots, Y_n$ *són intervals modals que compleixen*

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \underbrace{((A_{11} - du\,(A_{21})) * Y_1) + \cdots + ((A_{1n} - du\,(A_{2n})) * Y_n)}_{\textit{operacions fetes amb truncació externa}} & \subseteq & \underbrace{B_1 - du\,(B_2)}_{\substack{\textit{operació feta amb} \\ \textit{truncació interna}}} \\ \underbrace{(A_{21} * Y_1) + \cdots + (A_{2n} * Y_n)}_{\textit{operacions fetes amb truncació externa}} & \subseteq & B_2 \end{array} \right. \tag{A.6}$$

es complirà que $Y_1, \ldots, Y_n$ *és una solució de l'equació donada l'expressió A.5.*

Demostració.

A partir de les inclusions expressades en A.6, caldrà veure únicament que es compleix

$$A_{11} * Y_1 + \cdots + A_{1n} * Y_n \subseteq B_1;$$

és a dir, $Y_1, \ldots, Y_n$ són solució de

$$A_{11} * X_1 + \cdots + A_{1n} * X_n = B_1$$

Això ho veurem utilitzant la modalitat dels intervals $Y_1, \ldots, Y_n$[4].

1. Si $Y_1, \ldots, Y_n$ són propis, escriurem

$$\left. \begin{aligned} A_{11} * Y_1 + \cdots + A_{1n} * Y_n = \quad & (A_{11} + A_{21} - du\,(A_{21}))\, Y_1 + \\ & + \cdots + \\ + \quad & (A_{1n} + A_{2n} - du\,(A_{2n}))\, Y_n \end{aligned} \right|_{\substack{\text{Operacions} \\ \text{exactes}}}$$

i utilitzant la subdistributivitat del producte intervalar respecte de la suma a la qual ja hem fet referència anteriorment, tindrem

$$\begin{gathered} A_{11} * Y_1 + \cdots + A_{1n} * Y_n \subseteq \\ \subseteq \underbrace{(A_{11} - du\,(A_{21}))\, Y_1 + A_{21} Y_1 + \cdots + (A_{1n} - du\,(A_{2n}))\, Y_n + A_{2n} Y_n}_{\text{Operacions exactes}} \end{gathered} \tag{A.7}$$

i quan fem les operacions truncant exteriorment, aquesta última expressió podrem escriure-la com

$$\begin{gathered} A_{11} * Y_1 + \cdots + A_{1n} * Y_n \subseteq \\ \subseteq \underbrace{((A_{11} - du\,(A_{21}))\, Y_1 + \cdots + (A_{1n} - du\,(A_{2n}))\, Y_n) + (A_{21} Y_1 + \cdots + A_{2n} Y_n)}_{\text{Operacions fetes amb truncació externa}} \subseteq \\ \subseteq (B_1 - du\,(B_2)) + B_2 = B_1 \end{gathered}$$

2. Si $Y_1, \cdots, Y_n$ són impropis, a l'expressió

$$A_{11} * Y_1 + \cdots + A_{1n} * Y_n$$

li sumem

$$((-du\,(A_{21}))\, Y_1 + \cdots + (-du\,(A_{2n}))\, Y_n)$$

i el seu simètric; és a dir,

$$-du\,((-du\,(A_{21}))\, Y_1 + \cdots + (-du\,(A_{2n}))\, Y_n)\,.$$

[4] Aquestes modalitats són desconegudes. Tot i així, a continuació demostrarem que per a qualsevol modalitat dels intervals $Y_1, \ldots, Y_n$, la proposició és vàlida.

Així tindrem

$$\left.\begin{aligned} & A_{11} * Y_1 + \cdots + A_{1n} * Y_n = \\ & A_{11} * Y_1 + \cdots + A_{1n} * Y_n + \\ & + \left(\left(-du\left(A_{21}\right)\right) Y_1 + \cdots + \left(-du\left(A_{2n}\right)\right) Y_n\right) + \\ & + \left(-du\left(\left(-du\left(A_{21}\right)\right) Y_1 + \cdots + \left(-du\left(A_{2n}\right)\right) Y_n\right)\right) \end{aligned}\right|_{\substack{\text{Operacions}\\ \text{exactes}}} \tag{A.8}$$

Si ara utilitzem el lema A.5 tindrem

$$\left.\begin{aligned} & -du\left\{\left(-du\left(A_{21}\right)\right) Y_1 + \cdots + \left(-du\left(A_{2n}\right)\right) Y_n\right\} = \\ & = -du\left\{\left(-du\left(A_{21}\right)\right) Y_1\right\} - \cdots - du\left\{\left(-du\left(A_{2n}\right)\right) Y_n\right\} \end{aligned}\right|_{\substack{\text{Operacions}\\ \text{exactes}}} \tag{A.9}$$

però a partir del lema A.4 i donat que $Y_1, \cdots, Y_n$ són impropis, obtindrem les inclusions

$$\left.\begin{aligned} \left(-du\left(A_{21}\right)\right) Y_1 &\subseteq -du\left(A_{21} Y_1\right) \\ &\vdots \\ \left(-du\left(A_{2n}\right)\right) Y_n &\subseteq -du\left(A_{2n} Y_n\right) \end{aligned}\right|_{\substack{\text{Operacions}\\ \text{exactes}}}$$

Utilitzant aquestes inclusions en l'expressió A.9 resulta

$$\left.\begin{aligned} & -du\left\{\left(-du\left(A_{21}\right)\right) Y_1 + \cdots + \left(-du\left(A_{2n}\right)\right) Y_n\right\} \subseteq \\ & \subseteq -du\left(-du\left(A_{21} Y_1\right)\right) - \cdots - du\left(-du\left(A_{2n} Y_n\right)\right) = \\ & = A_{21} Y_1 + \cdots + A_{2n} Y_n \end{aligned}\right|_{\substack{\text{Operacions}\\ \text{exactes}}}$$

i per tant, a partir de la inclusió obtinguda en l'expressió A.8 tindrem

$$\left.\begin{aligned} & A_{11} * Y_1 + \cdots + A_{1n} * Y_n \subseteq \\ & \subseteq \left(A_{11} * Y_1 + \cdots + A_{1n} * Y_n\right) + \\ & + \left(\left(-du\left(A_{21}\right)\right) Y_1 + \cdots + \left(-du\left(A_{2n}\right)\right) Y_n\right) + \\ & + \left(A_{21} Y_1 + \cdots + A_{2n} Y_n\right) \end{aligned}\right|_{\substack{\text{Operacions}\\ \text{exactes}}} \tag{A.10}$$

Ara, a partir de la subdistributivitat del producte respecte la suma, i com que els intervals $Y_1, \cdots, Y_n$ són impropis, podrem escriure

$$\left.\begin{array}{c} A_{11} * Y_1 + \cdots + A_{1n} * Y_n \subseteq \\ (A_{11} - du\,(A_{21}))\,Y_1 + \cdots + (A_{1n} - du\,(A_{2n}))\,Y_n + \\ + (A_{21}Y_1 + \cdots + A_{2n}Y_n) \end{array}\right| \begin{array}{c} \text{Operacions fetes} \\ \text{amb truncació} \\ \text{externa.} \end{array} \tag{A.11}$$

i com que $Y_1, \cdots, Y_n$ verifiquen la inclusió donada en l'expressió A.6, es dedueix

$$A_{11} * Y_1 + \cdots + A_{1n} * Y_n \subseteq \underbrace{(B_1 - du\,(B_2)) + B_2}_{\substack{\text{Operacions fetes amb} \\ \text{truncació interna}}}.$$

però

$$\underbrace{(B_1 - du\,(B_2)) + B_2}_{\substack{\text{Operacions fetes amb} \\ \text{truncació interna}}} \subseteq \underbrace{(B_1 - du\,(B_2)) + B_2}_{\text{Operacions exactes}} = B_1$$

és a dir, $Y_1, \cdots, Y_n$ són solució del sistema

$$\left\{ \begin{array}{l} A_{11} * X_1 + \cdots + A_{1n} * X_n = B_1 \\ A_{21} * X_1 + \cdots + A_{2n} * X_n = B_2 \end{array} \right.$$

3. Si $Y_1, \cdots, Y_k$ són propis i $Y_{k+1}, \cdots, Y_n$ són impropis, la demostració és una combinació dels dos casos anteriors, i per tant, no explicitarem amb

el mateix detall els passos ja fets anteriorment. Així resultarà

$$
\begin{aligned}
&A_{11}Y_1 + \cdots + A_{1k}Y_k + A_{1k+1}Y_{k+1} + \cdots + A_{1n}Y_n = \\
&\quad = (A_{11} + A_{21} - du\,(A_{21}))\,Y_1 + \cdots + (A_{1k} + A_{2k} - du\,(A_{2k}))\,Y_k + \\
&\quad + \qquad \{A_{1k+1}Y_{k+1} + \cdots + A_{1n}Y_n\} + \\
&\quad + (-du\,(A_{2k+1}))\,Y_{k+1} + \cdots + (-du\,(A_{2n}))\,Y_n + \\
&\quad + - du\,((-du\,(A_{2k+1}))\,Y_{k+1} + \cdots + (-du\,(A_{2n}))\,Y_n) \subseteq \\
&\quad \subseteq \{(A_{11} - du\,(A_{21}))\,Y_1 + \cdots + (A_{1k} - du\,(A_{2k}))\,Y_k + \\
&\qquad + A_{21}Y_1 + \cdots + A_{2k}Y_k + A_{1k+1}Y_{k+1} + \cdots + A_{1n}Y_n + \\
&\qquad + ((-du\,(A_{2k+1}))\,Y_{k+1} + \cdots + (-du\,(A_{2n}))\,Y_n) + \\
&\qquad + A_{2k+1}Y_{k+1} + \cdots + A_{2n}Y_n\} \subseteq \\
&\qquad \subseteq \{((A_{11} - du\,(A_{21}))\,Y_1 + \cdots + (A_{1k} - du\,(A_{2k}))\,Y_k) + \\
&\qquad + (A_{21}Y_1 + \cdots + A_{2k}Y_k) + \\
&\qquad + (A_{1k+1} - du\,(A_{2k+1}))\,Y_k + \cdots + (A_{1n} - du\,(A_{2n}))\,Y_n + \\
&\qquad + A_{2k+1}Y_{k+1} + \cdots A_{2n}Y_n\} \subseteq (B_1 - du\,(B_2)) + B_2 = B_1.
\end{aligned}
$$

A.3 Sistemes lineals amb operacions lineals

Tenim el sistema lineal

$$
\left\{
\begin{array}{ccc}
A_{11} \circ X_1 + \cdots + A_{1n} \circ X_n & = & B_1 \\
\vdots & & \vdots \\
A_{m1} \circ X_1 + \cdots + A_{mn} \circ X_n & = & B_m
\end{array}
\right. \tag{A.12}
$$

on cap dels intervals que hi intervenen conté zero en el seu interior.

Com a pas previ a la seva resolució, efectuarem una immersió digital de cada un dels coeficients i de cada terme independent sobre l'escala de càlcul (Vegeu capítol anterior, definició 3.9)[5]. El sistema quedarà expressat amb

[5]El procés d'immersió es fa per un tipus donat.

intervals de marques com

$$\left\{\begin{array}{rcl} \mathfrak{A}_{11} \circ \mathfrak{X}_1 + \cdots + \mathfrak{A}_{1n} \circ \mathfrak{X}_n & = & \mathfrak{B}_1 \\ \vdots & & \vdots \\ \mathfrak{A}_{m1} \circ \mathfrak{X}_1 + \cdots + \mathfrak{A}_{mn} \circ \mathfrak{X}_n & = & \mathfrak{B}_m \end{array}\right. \tag{A.13}$$

Observem que si en el sistema inicial (donat a l'expressió A.12) els coeficients i termes independents eren respectivament de la forma

$$A_{ij} = \left[\underline{a}_{ij}\,,\,\overline{a}_{ij}\right]$$
i
$$B_i = \left[\underline{b}_i\,,\,\overline{b}_i\right]$$

passem a tenir els coeficient i termes independents de la forma

$$\mathfrak{A}_{ij} = \left\langle \left[\underline{a}_{ij}\,,\,\overline{a}_{ij}\right], g_{ij} \right\rangle = \left[\left\langle \underline{a}_{ij}, g_{ij} \right\rangle\,,\langle \overline{a}_{ij}, g_{ij}\rangle\right]$$
i
$$\mathfrak{B}_i = \left\langle \left[\underline{b}_i\,,\,\overline{b}_i\right], g_i \right\rangle = \left[\langle \underline{b}_i, g_i\rangle\,,\left\langle \overline{b}_i, g_i\right\rangle\right]$$

Remarquem que obrim la porta a la possibilitat que les granularitats no siguin iguals per a poder utilitzar els següents raonaments per a la resolució de qualsevol sistema lineal d'intervals de marques.

Amb aquestes transformacions, expressant cada una de les incògnites $\mathfrak{X}_j$ com

$$\mathfrak{X}_j = \left\langle \left[\underline{x}_j\,,\,\overline{x}_j\right], g_{xj} \right\rangle = \left[\left\langle \underline{x}_j, g_{xj} \right\rangle\,,\langle \overline{x}_j, g_{xj}\rangle\right],$$

reduïm el sistema expressat en A.13 a dos sistemes d'equacions

$$\left\{\begin{array}{rcl} \langle \underline{a}_{11}, g_{11}\rangle * \langle \underline{x}_1, g_{x1}\rangle + \cdots + \langle \underline{a}_{1n}, g_{1n}\rangle * \langle \underline{x}_n, g_{xn}\rangle & = & \langle \underline{b}_1, g_1\rangle \\ \vdots & & \vdots \\ \langle \underline{a}_{m1}, g_{m1}\rangle * \langle \underline{x}_1, g_{x1}\rangle + \cdots + \langle \underline{a}_{mn}, g_{mn}\rangle * \langle \underline{x}_n, g_{xn}\rangle & = & \langle \underline{b}_m, g_m\rangle \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rcl} \langle \overline{a}_{11}, g_{11}\rangle * \langle \overline{x}_1, g_{x1}\rangle + \cdots + \langle \overline{a}_{1n}, g_{1n}\rangle * \langle \overline{x}_n, g_{xn}\rangle & = & \left\langle \overline{b}_1, g_1\right\rangle \\ \vdots & & \vdots \\ \langle \overline{a}_{m1}, g_{m1}\rangle * \langle \overline{x}_1, g_{x1}\rangle + \cdots + \langle \overline{a}_{mn}, g_{mn}\rangle * \langle \overline{x}_n, g_{xn}\rangle & = & \left\langle \overline{b}_m, g_m\right\rangle. \end{array}\right.$$

La resolució d'aquests sistemes utilitzant mètodes reals amb operacions de marques determinarà una solució que podem suposar del tipus $\left\langle \underline{y}_1, g_{y1}\right\rangle$, $\ldots$, $\left\langle \underline{y}_n, g_{yn}\right\rangle$ i $\langle \overline{y}_1, g_{y1}\rangle$, $\ldots$, $\langle \overline{y}_n, g_{yn}\rangle$.

Per a aquestes solucions es complirà

$$\left\{\begin{array}{lcl} \langle \underline{a}_{11}, g_{11}\rangle * \left\langle \underline{y}_1, g_{y1}\right\rangle + \cdots + \langle \underline{a}_{1n}, g_{1n}\rangle * \left\langle \underline{y}_n, g_{yn}\right\rangle & \approx_\alpha & \langle \underline{b}_1, g_1\rangle \\ \vdots & & \vdots \\ \langle \underline{a}_{m1}, g_{m1}\rangle * \left\langle \underline{y}_1, g_{y1}\right\rangle + \cdots + \langle \underline{a}_{mn}, g_{mn}\rangle * \left\langle \underline{y}_n, g_{yn}\right\rangle & \approx_\alpha & \langle \underline{b}_m, g_m\rangle \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{lcl} \langle \overline{a}_{11}, g_{11}\rangle * \langle \overline{y}_1, g_{y1}\rangle + \cdots + \langle \overline{a}_{1n}, g_{1n}\rangle * \langle \overline{y}_n, g_{yn}\rangle & \approx_\alpha & \left\langle \overline{b}_1, g_1\right\rangle \\ \vdots & & \vdots \\ \langle \overline{a}_{m1}, g_{m1}\rangle * \langle \overline{y}_1, g_{y1}\rangle + \cdots + \langle \overline{a}_{mn}, g_{mn}\rangle * \langle \overline{y}_n, g_{yn}\rangle & \approx_\alpha & \left\langle \overline{b}_m, g_m\right\rangle \end{array}\right.$$

sempre que les granularitats resultants siguin compatibles amb αt, $\alpha \in \,]0,1]$.

Així prenent els intervals de marques

$$\begin{array}{c} \mathfrak{Y}_1 = \left\langle \left[\underline{y}_1\,,\,\overline{y}_1\right], g_{y1}\right\rangle = \left[\left\langle \underline{y}_1, g_{y1}\right\rangle, \langle \overline{y}_1, g_{y1}\rangle\right] \\ \vdots \\ \mathfrak{Y}_n = \left\langle \left[\underline{y}_n\,,\,\overline{y}_n\right], g_{yn}\right\rangle = \left[\left\langle \underline{y}_n, g_{yn}\right\rangle, \langle \overline{y}_n, g_{yn}\rangle\right] \end{array}$$

tindrem

$$\left\{\begin{array}{lcl} \mathfrak{A}_{11} \circ \mathfrak{Y}_1 + \cdots + \mathfrak{A}_{1n} \circ \mathfrak{Y}_n & \approx_\alpha & \mathfrak{B}_1 \\ \vdots & & \vdots \\ \mathfrak{A}_{m1} \circ \mathfrak{Y}_1 + \cdots + \mathfrak{A}_{mn} \circ \mathfrak{Y}_n & \approx_\alpha & \mathfrak{B}_m. \end{array}\right.$$

Bibliografia

[1] Albrecht, R., Kulish, U. *Grundlagen der Computer Arithmetik.* Computing Supplementum 1. Springer 1977.

[2] Alefeld, G., Grigorieff, R.D. *Fundamentals of Numerical Computation.* Computing Supplementum 2. Springer 1980.

[3] Alefeld, G., Herzberg, J. *Introduction to Interval Computations.* Academic Press 1983.

[4] Gardeñes E. *Computing with the completed set of intervals: Sigla.PL/I-System.* 22$^{\text{nd}}$ Sciencie Week. Damascus 1982.

[5] Gardeñes E. *Numerical information and modal intervals.* 26$^{\text{th}}$ Science Week. Novembrer 1986. Latakia (Syria).

[6] Gardeñes E., Mielgo H. *Modal Interval Analysis: Functions.* Polish Symposium on interval and Fuzzy Mathematics. Poznan 1986.

[7] Gardeñes E., Mielgo H., Sainz M.A. *Presentation of the research group SIGLA/X.* Report de Recerca. IMA 95-10. Departament d'Informàtica i Matemàtica Aplicada. Universitat de Girona.

[8] Gardeñes E., Mielgo, H., Trepat, A. *Modal intervals: reason and ground semantics.* Lecture notes in Computer Science 212. Springer 1986.

[9] Gardeñes, E. Trepat, A., Janer, J.M. *Approaches to Simulation and to the Linear Problem in the SIGLA System.* Institut für Angewandte Mathematic. - Universität. Freiburg Intervall Berichte. Germany 1981.

[10] Gardeñes, E. Trepat, A., Janer, J.M. *Proceedings of an International Symposium on Interval Mathematics: Sec 2: Sigla - PL/1 Developement and Applications. Twins.* Academic Press 1980. Edited by Karl L.E. Nickel. Universität. Freiburg Intervall Berichte.

[11] Hansen, E. *Topics in Interval Analysis.* Oxford University Press 1969.

[12] Kaucher, E. *Interval Analysis in the Extended Interval Space IR.* Computing Suplementum 2, Springer Heidelberg 1979 pgs 33-49.

[13] Kyburg, H.E. *Quantities, Magnitudes, and Numbers.* Philosophy of Science, 64 (September 1977) pp 377 - 410. Chicago 1977.

[14] Markov, S. *Interval Differential Equations.* Department of Mathematics. University of Sofia, 1980.

[15] Mielgo, H. *Programming Language Extensions.* 25th Science Week. Damascus 1985.

[16] Mielgo, H. *SIGLADEF: a generator for problem-oriented dialects of programming languages.* 22nd Science Week. Damascus 1982.

[17] Moore, R.E. *Interval Analysis.* Prentice Hall 1966.

[18] Moore, R.E. *Methods and Applications of Numerical Analysis.* SIAM Studies in Applied Mathematics. Philadelphia 1979.

[19] Nickel, K. *Interval Mathematics* Lecture notes in Computer Science. Springer 1975.

[20] Nickel, K. *Interval Mathematics 1980* Academic Press 1980.

[21] Ris, F.N. *Interval Analysis and Application to Linear Algebra.* Ph. D. Thesis, Oxford University, 1972.

[22] Sainz, M.A., Gardeñes, E., Jorba, L. *Formal Solution to Systems of Interval Linear or Non-linear Equations.* Reliable Computing. Kluwer Academic Publishers. Vol 8. N. 3. pp 189 - 211. Holanda 2002.

[23] Sainz, M.A., Gardeñes, E., Jorba, L. *Interval Estimations of Solution Sets to Real - Valued Systems of Linear or non-Linear Equations.* Reliable Computing. Kluwer Academic Publishers. Vol 8. N. 4. pp 283 - 305. Holanda 2002.

[24] Shary, P. *Algebraic approach in the "outer problem" for Interval Linear Equations.* Reliable computing 3. 1997 pgs 103-135.

[25] Shary, P. *Algebraic Approach to the Interval Linear Static Identification, Tolerance and Control Problems* Reliable computing 2 1966 pgs 3-33.

[26] Shary, P. *Algebraic Solutions to Interval Linear Equations and their Applications*. Numerical Methods and Error Bounds. G. Alefeld & J. Herzberger, eds. Akademic Verlag, Berlin 1996 (pgs 224-233).

[27] Shary, P. *Controllable solution set to interval static systems* Applied Mathematics and Computation, 86 (1997) pgs 185-196.

[28] Shary, P. *Interval Gauss-Seidel Method for Generalized Solution Sets to Interval Linear Systems.* Applications of Interval Analysis to Systems and Control (Proceedings of the Workshop MISC'99) Universitat de Girona 1999 pgs 67-81.

[29] SIGLA/X Group. *Construcción de los intervalos modales.* Report de Recerca. IMA 96-07-RR. Departament d'Informàtica i Matemàtica Aplicada. Universitat de Girona.

[30] SIGLA/X Group. *Ground construction of modal intervals.* Report de Recerca. IMA 96-4. Departament d'Informàtica i Matemàtica Aplicada. Universitat de Girona.

[31] SIGLA/X Group. *Información numérica e intervalos modales.* Report de Recerca. IMA 96-08-RR. Departament d'Informàtica i Matemàtica Aplicada. Universitat de Girona.

[32] SIGLA/X Group. *Modal Intervals. Basic Tutorial.* Applications of Interval Analysis to Systems and Control (Proceedings of the Workshop MISC'99) Universitat de Girona 1999 pgs 157-227.

[33] SIGLA/X Group. *Modal Intervals. Draft for a basic tutorial.* Report de Recerca. IMA 98-07. Departament d'Informàtica i Matemàtica Aplicada. Universitat de Girona.

[34] SIGLA/X Group. *Modal Intervals.* Reliable Computing. Kluwer Academic Publishers Vol 7. April 2001. Pgs 77-111.

[35] Sunaga, T. *Theory of an interval Interval Algebra and its Applications.* RAAG Memoirs 2, pgs 547-564 1958.

[36] Thieler, P. *Technical calculations by means of interval mathematics.* Fachhochschule Darmstadt (Alemània).

[37] Trepat, A. *Completación reticular del espacio de intervalos.* Tesina de Llicenciatura. Departament d'Equacions Funcionals. Facultat de Matemàtiques Universitat de Barcelona, 1982.

[38] Vplker S. *Lectures about implementation of interval languages.* Informe intern Universitat de Barcelona, 1978.